Wykład 2: Całki niewłaściwe. Zastosowania geometryczne całki Riemanna

CAŁKI NIEWŁAŚCIWE PIERWSZEGO RODZAJU: $\int_a^\infty f(x)dx$, $\int_{-\infty}^b f(x)dx$, $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$

Definicja. Jeśli $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, \beta]$ dla każdego $\beta > a$ oraz istnieje granica $\lim_{\beta\to\infty} \int_a^\beta f(x)dx$, to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą pierwszego rodzaju i oznaczamy $\int_a^\infty f(x)dx$:

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{\beta\to\infty} \int_a^\beta f(x)dx.$$

Ponadto, gdy powyższa granica istnieje i jest skończona, to całkę niewłaściwą nazywamy zbieżną, natomiast w przypadku przeciwnym (tzn. gdy granica ta nie istnieje lub równa się ∞ lub $-\infty$) całkę niewłaściwą nazywamy rozbieżną.
Analogicznie definiujemy

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{\alpha\to-\infty} \int_\alpha^b f(x)dx,$$

pod warunkiem, że $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $[\alpha, b]$ dla każdego $\alpha < b$ oraz powyższa granica istnieje.

Definicja. Jeśli $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $[\alpha, \beta]$ dla dowolnych $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ oraz dla pewnego $c \in \mathbb{R}$ istnieją granice $\lim_{\alpha\to-\infty} \int_\alpha^c f(x)dx$ i $\lim_{\beta\to\infty} \int_c^\beta f(x)dx$, to

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx := \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx = \lim_{\alpha\to-\infty} \int_\alpha^c f(x)dx + \lim_{\beta\to\infty} \int_c^\beta f(x)dx,$$

jeśli tylko sumowanie to da się wykonać, tzn. jeśli nie otrzmamy wyrażenia postaci $[\infty - \infty]$ lub $[-\infty + \infty]$. Ponadto, jeśli obie te granice istnieją i są skończone, to całkę niewłaściwą nazywamy zbieżną, natomiast w pozostałych przypadkach - rozbieżną.

CAŁKI NIEWŁAŚCIWE DRUGIEGO RODZAJU:

Definicja. Jeśli $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, \beta]$ dla każdego $a < \beta < b$ oraz istnieje granica $\lim_{\beta\to b^-} \int_a^\beta f(x)dx$, to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą drugiego rodzaju i oznaczamy $\int_a^b f(x)dx$:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\beta\to b^-} \int_a^\beta f(x)dx.$$

Ponadto, gdy powyższa granica istnieje i jest skończona, to całkę niewłaściwą nazywamy zbieżną, natomiast w przypadku przeciwnym całkę niewłaściwą nazywamy rozbieżną.
Analogicznie definiujemy

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\alpha\to a^+} \int_\alpha^b f(x)dx,$$

gdy $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $[\alpha, b]$ dla każdego $a < \alpha < b$ oraz powyższa granica istnieje.

Ogólniej: Jeśli funkcja f ma w przedziale (a, b) jeden lub więcej punktów osobliwych (ale skończoną ich ilość), to dzielimy przedział $[a, b]$ na części mające po jednym punkcie osobliwym na początku lub na końcu przedziału; np.

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)(x-3)} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)(x-3)} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)(x-3)} + \int_2^3 \frac{dx}{(x-1)(x-3)} =$$

$$= \lim_{a\to1^-} \int_0^a \frac{dx}{(x-1)(x-3)} + \lim_{b\to1^+} \int_b^2 \frac{dx}{(x-1)(x-3)} + \lim_{c\to3^-} \int_2^c \frac{dx}{(x-1)(x-3)} = \dots$$

KRYTERIA ZBIEŻNOŚCI CAŁEK NIEWŁAŚCIWYCH:

Niech $b = \infty$ lub ($b \in \mathbb{R}$ i $b > a$).

Twierdzenie 2.1 (kryterium porównawcze)**.**
Jeśli $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ są funkcjami całkowalnymi w sensie Riemanna na $[a, \beta]$ dla każdego $a < \beta < b$ oraz $\forall_{x\in[a,b)}\ 0 \leq f(x) \leq g(x)$, to

1. $\int_a^b g(x)dx$ jest zbieżna $\implies$ $\int_a^b f(x)dx$ też jest zbieżna;
2. $\int_a^b f(x)dx$ jest rozbieżna $\implies$ $\int_a^b g(x)dx$ też jest rozbieżna.

Twierdzenie 2.2. Jeśli $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, \beta]$ dla każdego $a < \beta < b$ oraz $\int_a^b |f(x)|dx$ jest zbieżna, to $\int_a^b f(x)dx$ też jest zbieżna.
W przypadku zbieżności mamy $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Prawdziwe są także analogiczne twierdzenia z funkcjami $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$, gdzie $a = -\infty$ lub ($a \in \mathbb{R}$ i $a < b$).

ZASTOSOWANIA GEOMETRYCZNE CAŁKI RIEMANNA:

Twierdzenie 2.3 (wzór na pole obszaru płaskiego pomiędzy wykresem funkcji a osią OX)**.**
Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją nieujemną i ciągłą i $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b] \text{ i } 0 \leq y \leq f(x)\}$, to

$$\text{pole } D \overset{\text{ozn.}}{=} |D| = \int_a^b f(x)dx.$$

Twierdzenie 2.4 (wzór na pole obszaru płaskiego pomiędzy wykresami dwóch funkcji)**.**
Jeśli $d, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi takimi, że $d(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$ i $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b] \text{ i } d(x) \leq y \leq g(x)\}$, to

$$|D| = \int_a^b [g(x) - d(x)]dx.$$

Twierdzenie 2.5 (wzór na długość łuku)**.**
Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1, to długość łuku opisanego równaniem $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, dana jest wzorem:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

Twierdzenie 2.6 (wzór na objętość bryły obrotowej)**.**
Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to objętość bryły powstałej przez obrót krzywej $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, wokół osi OX, dana jest wzorem:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$