Wykład 3, 4: Szeregi liczbowe

Niech $a_n \in \mathbb{R}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.
Rozpatrujemy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$.

Definicja. Ciąg $\{S_n\}_{n\geq 1}$, gdzie $S_n = a_1+a_2+\ldots+a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ nazywamy ciągiem sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definicja. Jeśli istnieje granica ciągu sum częściowych (skończona lub nie), $\lim_{n\to\infty} S_n$, to nazywamy ją sumą szeregu i zapisujemy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$.

Jeśli granica $\lim_{n\to\infty} S_n$ istnieje i jest skończona, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy zbieżnym. W pozostałych przypadkach (tzn. gdy granica $\lim_{n\to\infty} S_n$ jest nieskończona lub nie istnieje) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy rozbieżnym.

Twierdzenie 3.1.
Szereg geometryczny $\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n$, gdzie $a_1 \neq 0$, jest zbieżny $\iff |q| < 1$, wówczas $\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n = \frac{a_1}{1-q}$.

Twierdzenie 3.2.
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ jest zbieżny $\iff \alpha > 1$.

Twierdzenie 3.3 (Podstawowy warunek konieczny zbieżności szeregu)**.**
Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Twierdzenie 3.4.
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\iff$ spełnia warunek Cauchy'ego zbieżności szeregu, tzn.

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{m>n\geq n_0}\ |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| < \varepsilon.$$

Uwaga 3.1.
Dwa szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, różniące się skończoną liczbą wyrazów, są jednocześnie zbieżne albo jednocześnie rozbieżne.

Twierdzenie 3.5. Jeśli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne i $\lambda \in \mathbb{R}$, to

- $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ jest zbieżny i $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
- $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ jest zbieżny i $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

SZEREGI O WYRAZACH NIEUJEMNYCH:

Zakładamy, że $a_n \geq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, tzn., że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ma wyrazy nieujemne.

Twierdzenie 3.6 (Kryterium porównawcze)**.**
Jeśli dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy $0 \leq a_n \leq b_n$, to

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Uwaga 3.2.
Wobec uwagi 3.1 kryterium porównawcze pozostanie prawdziwe jeśli założymy, że $\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_0}\ 0 \leq a_n \leq b_n$.

Twierdzenie 3.7 (Kryterium d'Alemberta)**.**
Jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $a_n > 0$ i istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{\text{ozn.}}{=} g$, to

1. $g < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$;
2. $g > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ (bo $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$);
3. $g = 1 \Rightarrow$?.

Twierdzenie 3.8 (Kryterium Cauchy'ego)**.**
Załóżmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $a_n \geq 0$ i oznaczmy $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$. Wówczas

1. $g < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$;
2. $g > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ (bo $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$);
3. $g = 1 \Rightarrow$?.

Twierdzenie 3.9 (Kryterium całkowe zbieżności szeregów)**.**
Jeśli funkcja $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ jest nieujemna i nierosnąca, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ jest zbieżny} \iff \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ jest zbieżna.}$$

SZEREGI O WYRAZACH DOWOLNYCH:

Definicja. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie $\iff$ zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Twierdzenie 3.10. Każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny. Dokładniej:
Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie, to jest on zbieżny i $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Definicja. Szereg, który jest zbieżny, ale nie jest zbieżny bezwzględnie, nazywamy zbieżnym warunkowo.

Twierdzenie 3.11 (Kryterium Dirichleta)**.**
Jeśli

- $\{a_n\}$ jest ciągiem nierosnącym i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (co w skrócie oznaczamy $a_n \searrow 0$) i
- $\{b_n\}$ jest ciągiem takim, że ciąg sum częściowych $\{b_1 + b_2 + \ldots + b_n\}$ jest ograniczony, tzn.

$$\exists_{M\in\mathbb{R}} \forall_{n\in\mathbb{N}} |b_1 + b_2 + \ldots + b_n| \leq M,$$

to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

Twierdzenie 3.12 (Kryterium Leibniza)**.**
Jeśli $\{a_n\}$ jest ciągiem nierosnącym i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ jest zbieżny.

Definicja. Ciąg liczb naturalnych $\{p_n\}$ nazywamy permutacją ciągu wszystkich kolejnych liczb naturalnych $\iff$ każda liczba naturalna występuje w tym ciągu dokładnie jeden raz.

Twierdzenie 3.13 (o zmianie kolejności sumowania)**.**
Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest przemienny, to znaczy dla każdej permutacji ciągu wszystkich kolejnych liczb naturalnych $\{p_n\}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$ jest zbieżny i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$. Innymi słowy, szereg zbieżny bezwzględnie pozostaje zbieżny i nie zmienia wartości swojej sumy po dowolnej zmianie porządku jego wyrazów.

Uwaga 3.3. Szereg, który nie jest zbieżny bezwzględnie nie ma powyższej własności. Co ciekawe, jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny warunkowo, to odpowiednio przestawiając jego wyrazy można uzyskać:

- szereg zbieżny do dowolnie zadanej sumy $S \in \mathbb{R}$,
- szereg rozbieżny do $-\infty$ lub $+\infty$,
- szereg, którego ciąg sum częściowych nie ma granicy ani skończonej, ani nieskończonej.