Wykład 5: Ciągi i szeregi funkcyjne

Poniżej zakładamy, że $A \subset \mathbb{R}$ i $f, f_n : A \to \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Definicja. Mówimy, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest zbieżny do funkcji f (punktowo) $\iff$

$$\forall_{x\in A} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \iff \forall_{x\in A}\, \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\, \forall_{n\geq n_0}\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Zapisujemy $f_n \to f$.

Definicja. Mówimy, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest zbieżny do funkcji f jednostajnie $\iff$

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\, \forall_{n\geq n_0}\, \forall_{x\in A}\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Zapisujemy $f_n \rightrightarrows f$ lub $f_n \rightrightarrows_A f$.

Twierdzenie 5.1.

$$f_n \rightrightarrows_A f \iff \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Twierdzenie 5.2 (O ciągłości granicy ciągu funkcyjnego)**.**
Jeśli $f_n \rightrightarrows_A f$ i funkcje f_n, $n \in \mathbb{N}$, są ciągłe w punkcie $a \in A$, to f też jest ciągła w punkcie a.

Wniosek 5.1. Jeśli $f_n \rightrightarrows_A f$ i funkcje f_n, $n \in \mathbb{N}$, są ciągłe, to f też jest ciągła.

Twierdzenie 5.3 (Warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej)**.**
Ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest zbieżny jednostajnie (na zbiorze A) $\iff$ ciąg ten spełnia warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej, tzn. $\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\, \forall_{m,n\geq n_0}\, \forall_{x\in A}\, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Twierdzenie 5.4 (O różniczkowaniu granicy ciągu funkcyjnego)**.**
Jeśli

- $P \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem ograniczonym,
- $f_n : P \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w każdym punkcie przedziału P,
- ciąg $\{f_n'\}$ jest zbieżny jednostajnie na P,
- $\exists_{x_0\in P}$ $\{f_n(x_0)\}$ jest zbieżny,

to

1. ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny jednostajnie na P do pewnej funkcji granicznej f;
2. f jest funkcją różniczkowalną w każdym punkcie przedziału P i

$$\forall_{x\in P}\, f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \left(\text{tzn. } \forall_{x\in P} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \right).$$

Twierdzenie 5.5 (O całkowaniu granicy ciągu funkcyjnego)**.**
Jeśli

- $P \subset \mathbb{R}$ jest dowolnym przedziałem,
- $f_n : P \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi,
- $f_n \rightrightarrows_P f$,

$$\text{to} \qquad \forall_{a,b\in P} \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Poniżej zakładamy, że $A \subset \mathbb{R}$ i $u_n : A \to \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$.
Niech $s_n := u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$, $n \in \mathbb{N}$.

Definicja. Ciąg funkcyjny $\{s_n\}$ nazywamy ciągiem sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Definicja. Jeśli ciąg sum częściowych $\{s_n\}$ jest zbieżny punktowo na zbiorze A, to mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny punktowo na zbiorze A, zaś funkcję $s(x) := \lim_{n\to\infty} s_n(x)$, $x \in A$, nazywamy sumą tego szeregu i zapisujemy $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in A$:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \iff s_n := u_1 + u_2 + \ldots + u_n \to s \iff \forall_{x\in A}\, s_n(x) \to s(x)$$

$$\iff \forall_{x\in A} \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\, \forall_{n\geq n_0}\, |s_n(x) - s(x)| < \varepsilon.$$

Definicja. Jeśli ciąg sum częściowych $\{s_n\}$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze A, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ nazywamy zbieżnym jednostajnie na A:

$$s_n \rightrightarrows_A s \iff \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\, \forall_{n\geq n_0} \forall_{x\in A}\, |s_n(x) - s(x)| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 5.6 (Warunek Cauchy'ego zbieżności punktowej szeregu funkcyjnego)**.**
Szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny punktowo (na zbiorze A) $\iff$ spełnia warunek Cauchy'ego zbieżności punktowej szeregu funkcyjnego, tzn.

$$\forall_{x\in A}\, \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\, \forall_{m>n\geq n_0}\, |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_m(x)| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 5.7 (Warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego)**.**
Szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny jednostajnie (na zbiorze A) $\iff$ spełnia warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego, tzn.

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\, \forall_{m>n\geq n_0}\, \forall_{x\in A}\, |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_m(x)| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 5.8 (Kryterium Weierstrassa)**.**
Jeśli istnieje ciąg liczbowy $\{a_n\}$ taki, że $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, \forall_{x\in A}\, |u_n(x)| \leq a_n$ i szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie na A.

Twierdzenie 5.9 (O ciągłości sumy szeregu funkcyjnego)**.**
Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny jednostajnie na A do funkcji s i każda z funkcji u_n, $n \in \mathbb{N}$, jest ciągła w punkcie $a \in A$, to s jest ciągła w punkcie a.

Twierdzenie 5.10 (O różniczkowaniu sumy szeregu funkcyjnego)**.**
Jeśli

- $P \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem ograniczonym,
- $u_n : P \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w każdym punkcie przedziału P,
- szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ jest zbieżny jednostajnie na P,
- $\exists_{x_0\in P}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ jest zbieżny,

to

1. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny jednostajnie na P do pewnej funkcji s;
2. s jest funkcją różniczkowalną w każdym punkcie przedziału P i

$$\forall_{x\in P}\, s'(x) = \lim_{n\to\infty} s_n'(x) \qquad \text{tzn. } \forall_{x\in P} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Twierdzenie 5.11 (O całkowaniu sumy szeregu funkcyjnego)**.**
Jeśli

- $P \subset \mathbb{R}$ jest dowolnym przedziałem,
- $u_n : P \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi,
- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny jednostajnie na P do funkcji s,

to

$$\forall_{a,b\in P} \int_a^b s(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)dx \text{ tzn. } \forall_{a,b\in P} \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx.$$