Wykład 6: Szeregi potęgowe. Szereg Fouriera

Definicja. Szeregiem potęgowym nazywamy szereg funkcyjny postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, gdzie $\{a_n\}$ jest ciągiem liczbowym (umowa $0^0 := 1$).

Uwaga 6.1. Ogólniej szeregiem potęgowym nazywamy szereg funkcyjny postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$. Dzięki podstawieniu $y = x - x_0$ można go sprowadzić do postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$.

Uwaga 6.2. Każdy szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny dla $x = 0$.

Twierdzenie 6.1. Dla każdego szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ istnieje $R \in [0, \infty]$ o następującej własności:

- jeśli $|x| < R$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny bezwzględnie;
- jeśli $|x| > R$, to szereg ten jest rozbieżny.

Definicja. R z powyższego twierdzenia nazywa się promieniem zbieżności szeregu potęgowego. W przypadku, gdy $R > 0$, przedział $(-R, R)$ nazywa się przedziałem zbieżności szeregu potęgowego.

Twierdzenie 6.2 (Cauchy'ego-Hadamarda).
Promień zbieżności R szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ wyraża się wzorem:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \text{jeśli} \quad \lambda \in (0, \infty), \\ 0 & \text{jeśli} \quad \lambda = \infty, \\ \infty & \text{jeśli} \quad \lambda = 0, \end{cases} \qquad \text{gdzie } \lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Twierdzenie 6.3.
Jeśli istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \overset{ozn.}{=} \lambda$, to promień zbieżności R szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ wyraża się wzorem:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \text{jeśli} \quad \lambda \in (0, \infty), \\ 0 & \text{jeśli} \quad \lambda = \infty, \\ \infty & \text{jeśli} \quad \lambda = 0. \end{cases}$$

Twierdzenie 6.4 (O ciągłości sumy szeregu potęgowego).
Jeśli promień zbieżności R szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest dodatni, to funkcja $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest ciągła w $(-R, R)$.

Twierdzenie 6.5 (Abela).
Suma szeregu potęgowego $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest funkcją ciągłą w każdym punkcie, w którym szereg ten jest zbieżny (w punktach końcowych przedziału zbieżności ciągłość rozumiemy jako ciągłość jednostronną).

Twierdzenie 6.6 (O różniczkowaniu szeregu potęgowego).

1. Szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ mają ten sam promień zbieżności R.
2. Jeśli $R > 0$, to funkcja $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest różniczkowalna w $(-R, R)$ i
$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}.$$

Twierdzenie 6.7 (O całkowaniu szeregu potęgowego).

1. Szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ mają ten sam promień zbieżności R.
2. Jeśli $R > 0$, to funkcja $f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ jest całkowalna na $[0, x]$ dla każdego $x \in (-R, R)$ i
$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

SZEREG TAYLORA I MACLAURINA:

Definicja. Jeśli f jest funkcją klasy C^∞ na przedziale otwartym $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ dla pewnego $\delta > 0$, to szereg potęgowy postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

nazywamy szeregiem Taylora o środku w punkcie x_0 dla funkcji f.
Jesli $x_0 = 0$, to taki szereg nazywamy szeregiem Maclaurina.

Definicja. Mówimy, że funkcja $f \in C^\infty((x_0-\delta, x_0+\delta))$ dla pewnego $\delta > 0$ rozwija się w szereg Taylora o środku w punkcie x_0 jeśli f jest sumą tego szeregu dla dowolnego $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, tzn. jeśli

$$\forall_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)} \; f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Twierdzenie 6.8. Jeśli f jest sumą pewnego szeregu potęgowego w otoczeniu punktu x_0, to szereg ten jest szeregiem Taylora funkcji f.

Twierdzenie 6.9 (Przykłady rozwinięć funkcji w szereg Maclaurina)**.**

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{dla } |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

$$\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\} \implies (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \quad \text{dla } |x| < 1$$

SZEREG FOURIERA:

Twierdzenie 6.10. Jeśli funkcja f jest

- okresowa o okresie 2π,
- przedziałami monotoniczna w przedziale $[-\pi, \pi]$,
- w punktach nieciągłości spełnia warunek $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = f(x)$,

to f rozwija się w szereg Fouriera, tzn. $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, gdzie

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \; n = 0, 1, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \; n = 1, 2, \dots.$$