Wykład 7: Przestrzenie metryczne

Poniżej X oznacza dowolny zbiór niepusty.

Definicja. Metryką w zbiorze X nazywamy funkcję $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ spełniającą następujące warunki

(1) $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$,
(2) $\forall_{x,y \in X} \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$,
(3) $\forall_{x,y,z \in X} \quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Definicja. Przestrzenią metryczną nazywamy parę (X, ρ), gdzie X jest zbiorem niepustym, zaś ρ jest metryką w X.
Elementy przestrzeni metrycznej nazywamy punktami, a liczbę $\rho(x, y)$ - odległością punktu x od punktu y.

Przykłady:
(1) Niech $X = \mathbb{R}^k$ i $\rho((x_1, x_2, ..., x_k), (y_1, y_2, ..., y_k)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2}$.
Wtedy funkcja $\rho : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to [0, \infty)$ jest metryką w $\mathbb{R}^k$. Nazywamy ją metryką naturalną lub metryką Euklidesową w R^k.
(2) Niech X to dowolny niepusty zbiór i $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \quad x = y, \\ 1 & \text{jeśli} \quad x \neq y. \end{cases}$
Wtedy funkcja $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ jest metryką w X. Nazywamy ją metryką dyskretną.

Definicja.

- Kulą (otwartą) o środku w punkcie $x_0 \in X$ i promieniu r w przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy zbiór
$$K(x_0, r) := \{x \in X : \ \rho(x, x_0) < r\}.$$
- Kulą domkniętą o środku w punkcie $x_0 \in X$ i promieniu r w przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy zbiór
$$\overline{K}(x_0, r) := \{x \in X : \ \rho(x, x_0) \leq r\}.$$
- Sferą o środku w punkcie $x_0 \in X$ i promieniu r w przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy zbiór
$$S(x_0, r) := \{x \in X : \ \rho(x, x_0) = r\}.$$

Definicja. Podzbiór A przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy ograniczonym jeśli jest zawarty w pewnej kuli o promieniu $r < \infty$, tzn. jeśli $\exists_{x_0 \in X} \ \exists_{r < \infty} \ A \subset K(x_0, r)$.

Definicja. Średnicą zbioru A zawartego w przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy liczbę
$$\delta(A) := \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \quad A = \emptyset, \\ \sup_{x,y \in A} \rho(x, y) & \text{jeśli} \quad A \neq \emptyset. \end{cases}$$