Wykład 8: Zbieżność w przestrzeniach metrycznych. Elementy topologii.

Przypomnienie: Jeśli $a, a_n \in \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$, to

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\, \forall_{n\geq n_0}\ \underbrace{|a_n - a|}_{\underset{\rho(a_n,a)}{\shortparallel}} < \varepsilon,$$

gdzie ostatnia równość zachodzi w metryce naturalnej.

Definicja. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ o wyrazach w przestrzeni metrycznej (X, ρ) jest zbieżny do $a \in X$

$$\iff \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\, \forall_{n\geq n_0}\ \rho(a_n, a) < \varepsilon \quad \text{tzn.} \quad \lim_{n\to\infty} \rho(a_n, a) = 0.$$

Zapisujemy $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ lub $a_n \to a$.

Własność 8.1. Każdy ciąg stały jest zbieżny: $(\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n = a) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Dowód. Mamy $\lim_{n\to\infty} \rho(a_n, a) = \lim_{n\to\infty} \rho(a, a) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$, co oznacza, że $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. □

Własność 8.2. Ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę.

Dowód. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ i $a \neq b$.
Skoro $a \neq b$, to musimy mieć $\rho(a, b) > 0$.
Weźmy $\varepsilon = \rho(a, b)/2 > 0$. Z definicji granicy otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \implies \exists_{n_1\in\mathbb{N}}\, \forall_{n\geq n_1}\ \rho(a_n, a) < \varepsilon,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b \implies \exists_{n_2\in\mathbb{N}}\, \forall_{n\geq n_2}\ \rho(a_n, b) < \varepsilon.$$

Zatem dla każdego $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ mamy

$$2\varepsilon = \rho(a, b) \leq \rho(a, a_n) + \rho(a_n, b) = \rho(a_n, a) + \rho(a_n, b) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Otrzymaliśmy $2\varepsilon < 2\varepsilon$, gdzie $\varepsilon > 0$, czyli sprzeczność. □

Własność 8. 3. Zmiana skończonej liczby wyrazów ciągu nie wpływa na jego zbieżność ani na wartość granicy.

Dowód. Chcemy pokazać, że jeśli $a_n \to a$ i ciąg $\{b_n\}$ jest taki, że $\exists_{n_1\in\mathbb{N}}\, \forall_{n\geq n_1}\ b_n = a_n$, to $b_n \to a$. Założenie, że $a_n \to a$ oznacza, że $\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\, \forall_{n\geq n_0}\ \rho(a_n, a) < \varepsilon$. Skoro $\forall_{n\geq n_1}\ b_n = a_n$, to mamy również $\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{n_2\in\mathbb{N}, n_2=\max\{n_0,n_1\}}\, \forall_{n\geq n_2}\ \rho(b_n, a) < \varepsilon$, co oznacza, że $b_n \to a$. □

Własność 8.4. Zbiór wyrazów ciągu zbieżnego jest ograniczony.

Dowód. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem zbieżnym, tzn. dla pewnego a mamy $a_n \to a$. Zbieżność ta jest równoważna zbieżności $\rho(a_n, a) \to 0$, co oznacza, że ciąg liczbowy $\alpha_n = \rho(a_n, a)$ jest zbieżny. Z poprzedniego semestru wiemy, że każdy ciąg liczbowy zbieżny jest ograniczony. Zatem ciąg $\{\alpha_n\}$ jest w szczególności ograniczony z góry, tzn.

$$\exists_{M\in\mathbb{R}}\, \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \alpha_n < M,$$

czyli

$$\exists_{M\in\mathbb{R}}\, \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \rho(a_n, a) < M,$$

co z kolei oznacza, że

$$\exists_{M\in\mathbb{R}}\, \forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \in K(a, M)$$

lub równoważnie

$$\exists_{M\in\mathbb{R}}\ \{a_1, a_2, \ldots\} \subset K(a, M).$$

Ostatnia relacja oznacza, że zbiór $\{a_1, a_2, \ldots\}$ jest ograniczony. □

Własność 8.5. Każdy podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy.

Dowód. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem zbieżnym, tzn. dla pewnego a mamy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Rozważmy dowolny podciąg $\{a_{n_k}\}$ ciągu $\{a_n\}$. Chcemy pokazać, że $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Wynika to z następującego ciągu równoważności i implikacji:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \alpha_n := \rho(a_n, a) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \implies \alpha_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a. \qquad \square$$

Definicja. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ punktów przestrzeni metrycznej (X, ρ) spełnia warunek Cauchy'ego

$$\iff \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{m,n\geq n_0}\ \rho(a_n, a_m) < \varepsilon.$$

Twierdzenie 8. 1. Każdy ciąg zbieżny $\{a_n\}$ punktów przestrzeni metrycznej spełnia warunek Cauchy'ego.

Dowód. Z założenia ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny, tzn. dla pewnego a mamy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, co z kolei oznacza, że $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_0}\ \rho(a_n, a) < \varepsilon/2$. Stąd dla dowolnego $\varepsilon > 0$ znajdziemy $n_0 \in \mathbb{N}$ (jest to n_0 z poprzedniego zdania) takie, że

$$\forall_{m,n\geq n_0}\ \rho(a_n, a_m) \leq \rho(a_n, a) + \rho(a_m, a) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \qquad \square$$

Uwaga 8.1. Istnieją przestrzenie metryczne, dla których twierdzenie odwrotne jest fałszywe, tzn. przestrzenie metryczne, w których ciąg spełniający warunek Cauchy'ego nie musi być zbieżny.

Przykład (przestrzeni metrycznej, w której mamy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego, nie będący ciągiem zbieżnym).
Rozważmy zbiór $X = (0, \infty)$ z metryką naturalną $\rho(x, y) = |x-y|$. W przestrzeni metrycznej (X, ρ) zdefiniujmy ciąg $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

Wtedy $a_n \to 0$ w $\mathbb{R}$, zatem $\{a_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Jednak ciąg ten nie ma granicy w $(0, \infty)$ (bo ma granicę równą 0 a drugiej granicy mieć nie może).

Definicja. Przestrzeń metryczną (X, ρ) nazywamy zupełną jeśli każdy ciąg $\{a_n\}$ punktów tej przestrzeni, spełniający warunek Cauchy'ego, jest zbieżny do punktu tej przestrzeni.

Twierdzenie 8.2. $\mathbb{R}$ z metryką naturalną jest przestrzenią metryczną zupełną.

Dowód. Z poprzedniego semestru wiemy, że:

$$\text{Ciąg liczbowy } \{a_n\} \text{ jest zbieżny} \iff \{a_n\} \text{ spełnia warunek Cauchy'ego,}$$

zaś zbieżność ciągu liczbowego z zeszłego semestru to zbieżność w przestrzeni $\mathbb{R}$ z metryką naturalną. $\square$

Twierdzenie 8.3 (Zbieżność w $\mathbb{R}^k$ z metryką naturalną)**.**
Niech $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ i $\mathbf{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{kn}) \in \mathbb{R}^k$ dla $n \geq 1$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a} \iff \forall_{i=1,\ldots,k}\ \lim_{n\to\infty} a_{in} = a_i,$$

tzn. ciąg jest zbieżny w $\mathbb{R}^k$ z metryką naturalną $\iff$ zbieżne są jego współrzędne.

Dowód.
$\Longrightarrow$). Zakładamy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a}$, co jest równoważne temu, że $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}) = 0$, co z kolei oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^k (a_{in} - a_i)^2} = 0$. Stąd

$$\forall_{j=1,2,\ldots,k} \quad 0 \leftarrow 0 \leq |a_{jn} - a_j| = \sqrt{(a_{jn} - a_j)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k (a_{in} - a_i)^2} \to 0.$$

i z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy, że $\forall_{j=1,2,\ldots,k} \lim\limits_{n\to\infty}|a_{jn} - a_j| = 0$, co oznacza, że $\forall_{j=1,2,\ldots,k} \lim\limits_{n\to\infty} a_{jn} = a_j$.

$\Longleftarrow$). Zakładamy, że $\forall_{i=1,\ldots,k} \lim\limits_{n\to\infty} a_{in} = a_i$, czyli, że

$$\forall_{i=1,\ldots,k}\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_i\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_i}\ |a_{in} - a_i| < \varepsilon/\sqrt{k}$$

Stąd

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}, n_0=\max\{n_1,n_2,\ldots,n_k\}}\ \forall_{n\geq n_0}\ \rho(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(a_{in} - a_i)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\frac{\varepsilon^2}{k}} = \varepsilon,$$

co oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}) = 0$, co z kolei jest równoważne temu, że $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a}$. □

Twierdzenie 8.4. $\mathbb{R}^k$ z metryką naturalną jest przestrzenią metryczną zupełną.

Dowód. Niech ciąg $\{\mathbf{a}_n\} = \{(a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{kn})\}$ spełnia warunek Cauchy'ego, tzn.

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{m,n\geq n_0}\ \rho(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_m) < \varepsilon. \tag{1}$$

Skoro dla $j = 1, 2, \ldots, k$ mamy $\rho(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_m) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(a_{in} - a_{im})^2} \geq \sqrt{(a_{jn} - a_{jm})^2} = |a_{jn} - a_{jm}|$, to z (1) otrzymujemy

$$\forall_{j=1,2,\ldots,k}\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{m,n\geq n_0}\ |a_{jn} - a_{jm}| < \varepsilon.$$

co oznacza, że dla każdego $j = 1, 2, \ldots, k$ ciąg $\{a_{jn}\}$ spełnia warunek Cauchy'ego w $\mathbb{R}$ z metryką naturalną. Wiemy, że $\mathbb{R}$ z metryką naturalną jest przestrzenią metryczną zupełną. Zatem

$$\forall_{j=1,2,\ldots,k} \text{ ciąg } \{a_{jn}\} \text{ jest zbieżny, oznaczmy } a_{jn} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_j.$$

Z twierdzenia 7.3 otrzymujemy $\mathbf{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{kn}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (a_1, a_2, \ldots, a_k) = \mathbf{a}$.

Udało nam się zatem pokazać, że każdy ciąg, określony w $\mathbb{R}^k$ z metryką naturalną i spełniający warunek Cauchy'ego, jest zbieżny. □

Twierdzenie 8.5 (Banacha o punkcie stałym/zasada Banacha/zasada odwzorowań zwężających)**.** Jeśli (X, ρ) jest przestrzenią metryczną zupełną i $f : X \to X$ jest odwzorowaniem zwężającym, tzn. funkcją spełniającą następujący warunek

$$\exists_{L\in(0,1)}\ \forall_{x,y\in X}\ \rho\left(f(x), f(y)\right) \leq L\rho(x, y),$$

to istnieje dokładnie jeden punkt $x_0 \in X$ taki, że $f(x_0) = x_0$.

Dowód twierdzenia Banacha pomijamy.

Punkt x_0 taki, że $f(x_0) = x_0$ nazywa się punktem stałym odwzorowania f.

ELEMENTY TOPOLOGII:

Definicja.

- Zbiór A zawarty w przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy zbiorem otwartym $\Longleftrightarrow$ każdy element a tego zbioru należy do A wraz z pewną kulą $K(a, r)$:

$$A \text{ jest otwarty } \Longleftrightarrow \forall_{a\in A}\ \exists_{r>0}\ K(a, r) \subset A.$$

- Zbiór A zawarty w przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy zbiorem domkniętym $\Longleftrightarrow$ $X \setminus A$ jest zbiorem otwartym.

Przykłady: Rozważmy $\mathbb{R}$ z metryką naturalną $\rho(x, y) = |x - y|$. Wtedy

- (a, b) jest zbiorem otwartym;
- $[a, b]$ jest zbiorem domkniętym, bo $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ jest otwarty;
- $[a, b)$ nie jest zbiorem ani otawrtym ani domkniętym.

Definicja.

- Wnętrze zbioru A, oznaczane $IntA$, w przestrzeni metrycznej (X, ρ) to zbiór

$$IntA := \{a \in A : \exists_{r>0} \, K(a, r) \subset A\}.$$

- Domknięcie zbioru A, oznaczane $\bar{A}$, w przestrzeni metrycznej (X, ρ) to zbiór

$$\bar{A} := \{x \in X : \forall_{r>0} \, K(x, r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

- Brzeg zbioru A, oznaczany ∂A, w przestrzeni metrycznej (X, ρ) to zbiór

$$\partial A := \bar{A} \setminus IntA.$$

Przykłady: W $\mathbb{R}$ z metryką naturalną mamy: $Int([a, b)) = (a, b)$, $\overline{[a, b)} = [a, b]$ i $\partial([a, b)) = \{a, b\}$.

Twierdzenie 8. 6.
Zbiór A zawarty w przestrzeni metrycznej jest domknięty $\iff \forall_{\{x_n\} \subset A} \, \forall_{x \in X} \, \left(\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow x \in A \right)$.

Dowód pomijamy.

Twierdzenie 8. 7. Podzbiór A przestrzeni metrycznej zupełnej jest przestrzenią zupełną (z tą samą matryką) $\iff$ A jest domknięty.

Dowód pomijamy.