Wykład 9: Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych. Pochodne cząstkowe i kierunkowe

Przez cały wykład zakładamy, że $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset R^k$. W R^k rozważamy metrykę naturalną $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho((x_1, x_2, ..., x_k), (y_1, y_2, ..., y_k)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i - y_i)^2}$.
Ponadto definiujemy $||\mathbf{x}|| := \rho(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}$ (jest to tzw. norma).

Definicja (Heinego granicy funkcji wielu zmiennych)**.**
Niech $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ będzie punktem skupienia zbioru D i niech $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Mówimy, że g jest granicą funkcji f w punkcie $\mathbf{a}$, co zapisujemy: $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = g$ lub $f(\mathbf{x}) \overset{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}{\to} g$, $\Leftrightarrow$

$$\forall_{\{\mathbf{x}_n\}\subset D\setminus\{\mathbf{a}\}} \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{a} \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_n) = g.$$

Definicja (Cauchy'ego skończonej granicy funkcji wielu zmiennych)**.**
Niech $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ będzie punktem skupienia zbioru D i niech $g \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = g \;\Leftrightarrow\; \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{\delta>0}\, \forall_{\mathbf{x}\in D}\; 0 < \rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - g| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 9.1. Definicje Heinego i Cauchy'ego skończonej granicy funkcji wielu zmiennych są równoważne.

Definicja (Cauchy'ego niewłaściwej granicy funkcji wielu zmiennych)**.**
Niech $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ będzie punktem skupienia zbioru D. Wtedy

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = +\infty \quad\Leftrightarrow\quad \forall_{G>0}\, \exists_{\delta>0}\, \forall_{\mathbf{x}\in D}\; 0 < \rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta \Rightarrow f(\mathbf{x}) > G,$$
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = -\infty \quad\Leftrightarrow\quad \forall_{G>0}\, \exists_{\delta>0}\, \forall_{\mathbf{x}\in D}\; 0 < \rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta \Rightarrow f(\mathbf{x}) < -G.$$

Definicja (Heinego ciągłości funkcji wielu zmiennych)**.**
Funkcja f jest ciągła w punkcie $\mathbf{a} \in D \;\Leftrightarrow\; \forall_{\{\mathbf{x}_n\}\subset D} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{a} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_n) = f(\mathbf{a})$.

Twierdzenie 9.2 (definicja Cauchy'ego ciągłości funkcji wielu zmiennych)**.**
Funkcja f jest ciągła w punkcie $\mathbf{a} \in D \;\Leftrightarrow\; \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{\delta>0}\, \forall_{\mathbf{x}\in D}\; \rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon$.

Twierdzenie 9.3. Funkcja f jest ciągła w punkcie $\mathbf{a} \in D$ będącym punktem skupienia zbioru D $\Leftrightarrow \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Definicja. Mówimy, że f jest ciągła $\Leftrightarrow$ jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

Twierdzenie 9.4 (O ciągłości modułu i działań arytmetycznych)**.**
Jeśli $f, g : D \to \mathbb{R}$ są ciągłe w punkcie $\mathbf{a} \in D$ i $c \in \mathbb{R}$ jest stałą, to

- cf, $|f|$, $f + g$ i fg są funkcjami ciągłymi w punkcie $\mathbf{a}$;
- $\frac{f}{g}$ jest funkcją ciągłą w punkcie $\mathbf{a}$ jeśli tylko $\forall_{\mathbf{x}\in D}\; g(\mathbf{a}) \neq 0$.

Poniżej zakładamy, że $G \subset R^k$ jest obszarem, $f : G \to \mathbb{R}$ i $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{k0}) \in G$.

Definicja (pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu)**.** Jeśli istnieje skończona granica

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_{10}+h, x_{20}, \ldots, x_{k0}) - f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{k0})}{h},$$

to nazywamy ją pochodną cząstkową funkcji f względem zmiennej x_1 w punkcie $\mathbf{x}_0$ i oznaczamy $f'_{x_1}(\mathbf{x}_0)$ lub $f_{x_1}(\mathbf{x}_0)$ lub $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)$.
Analogicznie określamy pochodne cząstkowe względem zmiennych $x_2, \ldots, x_k$:

$$f'_{x_i}(\mathbf{x}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_{10}, \ldots, x_{i-1,0}, x_{i0}+h, x_{i+1,0}, \ldots, x_{k0}) - f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{k0})}{h},\ i = 1, 2, \ldots, k,$$

jeśli tylko powyższa granica istnieje i jest skończona.

Uwaga 9.1. Funkcja wielu zmiennych, inaczej niż funkcja jednej zmiennej, może być nieciągła w punkcie $\mathbf{x}_0$ i mieć w nim wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu.

Definicja (pochodnych kierunkowych)**.**
Pochodną kierunkową funkcji f w punkcie $\mathbf{x}_0 \in G$ w kierunku wektora $\mathbf{v}$ takiego, że $||\mathbf{v}|| = 1$ nazywamy granicę

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t},$$

jeśli granica ta istnieje i jest skończona. Oznaczamy ją $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)$ lub $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)$ lub $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0)$.

W szczególności pochodna kierunkowa funkcji $f : G \to \mathbb{R}$, gdzie G to odszar zawarty w $\mathbb{R}^2$, w punkcie $(x_0, y_0) \in G$ w kierunku wektora $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ takiego że $v_1^2 + v_2^2 = 1$ to granica

$$f'_{\mathbf{v}}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Definicja. Wektor $\mathbf{v}$ taki, że $||\mathbf{v}|| = 1$ nazywamy wersorem.