Zadania domowe z Analizy Matematycznej I - część 1
(funkcje cyklometryczne, indukcja, kresy, granica ciągu, granica dolna i górna)

Zadanie 1. *Obliczyć* $\operatorname{arctg}(-1)$, $\arccos(\cos(\frac{16\pi}{5}))$, $\cos(\frac{1}{2}\arccos(-\frac{1}{8}))$, $\sin(2\arcsin(\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}))$, $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\arcsin(\frac{5}{13}))$.

Zadanie 2. *Przedstawić funkcję odwrotną względem funkcji* $f(x) = \frac{ctg(x-\frac{\pi}{2})}{2}$ *dla* $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *za pomocą funkcji* arcctg.

Zadanie 3. *Wyrazić funkcję odwrotną względem funkcji* $f(x) = 2\sin(3x-4)$ *obciętej do przedziału* $[\frac{4}{3}+\frac{\pi}{6}, \frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}]$ *poprzez funkcję* $\arcsin x$.

Zadanie 4. *Podać dziedziny i narysować wykresy funkcji* $f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)$, $g(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$.

Zadanie 5. *Udowodnić, że dla każdego* $x \in \mathbb{R}$ *mamy*
(a) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$,
(b) $\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg}(-x) = \pi$.

Zadanie 6. *Wykazać, że*

$$\forall_{n\in\mathbb{N}\wedge n\geq 3} \quad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}.$$

Zadanie 7. *Niech* A *będzie niepustym i ograniczonym z góry podzbiorem* $\mathbb{R}$, *niech* $\lambda > 0$ *oraz niech*

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

Udowodnić, że

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup A.$$

Zadanie 8. **(a)** *Niech* $f, g : A \mapsto \mathbb{R}$ *będą funkcjami ograniczonymi z dołu. Udowodnić, że*

$$\inf_{x\in A}(f(x)+g(x)) \geq \inf_{x\in A} f(x) + \inf_{x\in A} g(x).$$

(b) *Niech* $f, g : A \mapsto \mathbb{R}$ *będą funkcjami ograniczonymi. Udowodnić, że*

$$|\inf_{x\in A} f(x) - \inf_{x\in A} g(x)| \geq \inf_{x\in A}(f(x)-g(x)) \quad i \quad |\inf_{x\in A} f(x) - \inf_{x\in A} g(x)| \geq \inf_{x\in A}\big(-(f(x)-g(x))\big).$$

(c) *Niech* $f, g : A \mapsto \mathbb{R}$ *będą funkcjami ograniczonymi. Czy jest prawdą, że*

$$|\inf_{x\in A} f(x) - \inf_{x\in A} g(x)| \geq \inf_{x\in A} |f(x)-g(x)|?$$

Zadanie 9. *Bezpośrednio z definicji granicy ciągu wykazać, że* $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+3}+7}{2^n} = 8$.

Zadanie 10. *Obliczyć granice ciągów*

(a) $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$,

(b) $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+n+7}-n}$,

(c) $c_n = \sqrt[3]{2n^3+3n^2+n} - \sqrt[3]{2n^3+n^2-1}$,

(d) $d_n = n\left(\sqrt[3]{8n^3-n} - 2n\right)$,

(e) $e_n = \sqrt[n]{9^n+10^n+4}$,

(f) $f_n = \left(\frac{n-3}{n}\right)^{2n+1} + \sqrt[n]{3^n+4^n}$,

(g) $g_n = \sqrt{9n^2+\sqrt{n}} - 3n$,

(h) $h_n = n\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2n^3+5}$,

(i) $i_n = \sqrt[n]{2^{3n+1}+3n+2\cos(\frac{n}{2})}$,

(j) $j_n = \frac{7^n+3^{n-1}}{3^{n+2}-5\cdot 7^n}$,

(k) $k_n = \frac{n\sin(n!)}{n^2+1}$,

(l) $l_n = \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}$,

(m) $m_n = \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$,

(n) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^4+n}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+2n}} + \ldots + \frac{n}{\sqrt{n^4+nn}}$,

(o) $o_n = (0,9999+\frac{1}{n})^n$,

(p) $p_n = (1,0001-\frac{1}{n})^n$,

(r) $r_n = \left(\frac{n^3+1}{n^3}\right)^{n^5}$,

(s) $s_n = \left(\frac{3n+1}{7n-1}\right)^n$,

(t) $t_n = \left(\frac{7n+6}{7n-1}\right)^{-14n}$,

(u) $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{3-n}$.

Zadanie 11. *Zbadać zbieżność ciągów określonych rekurencyjnie i obliczyć ich granice, jeśli istnieją:*

(a) $\begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_{n+1} &= \sqrt{3a_n+18}, \quad n \geq 0, \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} b_1 &= 1 \\ b_{n+1} &= 6\cdot\frac{1+b_n}{7+b_n}, \quad n \geq 1. \end{cases}$

Zadanie 12. *Czy podane ciągi są zbieżne? Odpowiedź uzasadnić.*

(a) $a_n = \prod_{k=1}^{n}(1-4^{-k})$ **(b)** $\begin{cases} b_1 &= b \in \mathbb{R} \\ b_n &= \left(1-\frac{1}{3^n}\right) b_{n-1}, \quad n \geq 2 \end{cases}$

Zadanie 13. *Udowodnić przez indukcję, że* $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$ *dla* $n = 1,2,\ldots$. *Wykorzystując udowodnioną nierówność pokazać, że* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = \infty$.

Zadanie 14. *Zbadać, dla jakich* $x \in \mathbb{R}$ *poniższa granica jest skończona*

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right).$$

Zadanie 15. *Obliczyć granice górne i dolne następujących ciągów*

(a) $a_n = \left(1+\frac{(-1)^n}{2n}\right)^n$, **(b)** $b_n = \left(1+n^{-2}\right)^{n^2(-1)^{(n+1)n/2}}$,

(c) $c_n = \cos(n\pi)\cdot\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} + \sin\frac{n\pi}{2}$, **(d)** $d_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)} + \frac{(-1)^n}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}$,

(e) $e_n = \frac{n+1}{n^2}\cos(2n^2+3)$, **(f)** $f_n = (3^n+(-2)^n)^{2/n}$.

Zadanie 16. *Niech* $\{a_n\}$ *oraz* $\{b_n\}$ *będą ciągami ograniczonymi o wyrazach dodatnich. Czy jest prawdą, że*

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n \quad ?$$

ODPOWIEDZI:

1. $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\frac{1}{5}$ **2.** $f^{-1}(x) = \operatorname{arcctg}(2x) - \frac{\pi}{2}$

3. $f^{-1}(x) = (\pi + 4 - \arcsin(\frac{x}{2}))/3$

4. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$, $D_g = \mathbb{R}$

6. WSKAZÓWKA: Można przeprowadzić dowód indukcyjny.

8. (c) NIE jest prawdą. Kontrprzykład: $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x\neq 0 \\ -1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x\neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

10. (a) 1 (b) 2 (c) $\frac{2}{3\sqrt[3]{4}}$ (d) $-\frac{1}{12}$ (e) 10 (f) $e^{-6}+4$ (g) 0 (h) 0 (i) 8 (j) $-\frac{1}{5}$ (k) 0 (l) 1 (m) 0 (n) $\frac{1}{2}$ (o) 0 (p) ∞ (r) ∞ (s) 0 (t) e^{-14} (u) e

11. Podane ciągi są zbieżne, bo są monotoniczne i ograniczone. Szukane granice wynoszą (a) 6 (b) 2

12. Tak, są zbieżne.

14. Granica ta jest skończona jedynie dla $x\in[-1,1)$. (Dla $x\neq 1$ można pomnożyć wyrażenie przy granicy przez $\frac{1-x}{1-x}$ i uprościć.)

15. Granice dolne i górne wynoszą (a) $\frac{1}{\sqrt{e}}$, $\sqrt{e}$ (b) $\frac{1}{e}$, e (c) $-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$ (d) -2, 2 (e) 0, 0 (f) 9, 9

16. Badana równość nie jest prawdziwa (trzeba podać kontrprzykład).