Zadania domowe z Analizy Matematycznej I - część 2 (granica, ciągłość oraz pochodna funkcji jednej zmiennej)

Zadanie 1. *Wykazać, że nie istnieje granica* $\lim_{x\to-\infty}\sin(2x)$.

Zadanie 2. *Obliczyć granice (jeśli istnieją)*

(a) $\lim\limits_{x\to 81}\dfrac{27-\sqrt{x\sqrt{x}}}{3-\sqrt[4]{x}}$, **(b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{x(x+1)}\right)$, **(c)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$,

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{x^2+7}-\cos x\right)$, **(e)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x-12}{x^3-8}$, **(f)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2+x^3)}{\mathrm{tg}(2x^2+3x^3)}$.

Zadanie 3. *Zbadać ciągłość funkcji* f*, jeśli*

(a) $f(x)=(x-1)[x]$, **(b)** $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^n+x^n)}{n},\ x\geq 0$,

(c) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(\cos x)^{4n}$, **(d)** $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3x^{-2n}+7^n},\ x\neq 0$,

Zadanie 4. *Dobrać (jeśli to możliwe) wartości parametrów* a *i* b*, tak aby funkcja*

$$f(x)=\begin{cases} a\frac{1-\cos 2x}{4x^2} & dla \quad x<0,\\ bx+1 & dla \quad x\in[0,1],\\ \frac{x^4-x}{x-1} & dla \quad x>1\end{cases}$$

była ciągła na $\mathbb{R}$.

Zadanie 5. *Wyznaczyć asymptoty funkcji*

(a) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, **(b)** $f(x)=\exp\left(\dfrac{x^2+2}{8-2x^2}\right)$.

Zadanie 6. *Wykazać, że równanie*

$$e^x=1+2x$$

ma co najmniej dwa pierwiastki rzeczywiste.

Zadanie 7. *Czy poniższe funkcje są jednostajnie ciągłe? Odpowiedź uzasadnić.*

(a) $f(x)=2-3\cos x,\ x\in\mathbb{R}$, **(b)** $f(x)=\cos^2 x,\ x\in\mathbb{R}$, **(c)** $f(x)=\cos(\sin x),\ x\in\mathbb{R}$,

(d) $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right),\ x\in(0,1)$, **(e)** $f(x)=\ln x,\ x\in(0,\infty)$, **(f)** $f(x)=\cos\left(\sqrt{x}\right),\ x\in[0,\infty)$.

Zadanie 8. *Obliczyć pochodne podanych funkcji w ich naturalnych dziedzinach.*

(a) $f(x)=(3x^2-7)e^{-x^2+2x+1}$, **(b)** $f(x)=e^{-x^2}\cdot\ln x$, **(c)** $f(x)=\ln^3 x-e^{-x}$,

(d) $f(x)=e^{\sqrt{\sin x}}$, **(e)** $f(x)=\ln\left(e^{1/x}-x\right)$, **(f)** $f(x)=5\sin^4 x-2\sin 4x$,

(g) $f(x)=\cos\left(\arcsin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$, **(h)** $f(x)=\ln\left(\sqrt[5]{x^2+2}\right)$, **(i)** $f(x)=\log\left(\sqrt[3]{x^2}\right)$,

(j) $f(x)=7^{\sqrt{x}}$, **(k)** $f(x)=\log_{(1-x)}\sin x$, **(l)** $f(x)=(\mathrm{tg}x)^{3x^2}$.

Zadanie 9. *Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej wyznaczyć pochodne funkcji* $\arccos x$ *i* $\mathrm{arcctg}\, x$*. Nastepnie obliczyć pochodną funkcji* $f:\mathbb{R}\setminus[-1,1]\to\mathbb{R}$ *danej wzorem*

$$f(x)=\arccos\frac{1}{|x|}.$$

Zadanie 10. *Zbadać, czy funkcja* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *dana wzorem*

$$f(x)=\begin{cases} x\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x} & dla\ x\neq 0\\ 0 & dla\ x=0\end{cases}$$

ma pochodną w punkcie $x=0$.

Zadanie 11. *Obliczyć pochodną funkcji* $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, *w tych punktach, w których jest ona różniczkowalna.*

Zadanie 12. *Niech* $f(x) = \cos(\sin\sqrt{x})$. *Obliczyć* $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$.

Zadanie 13. *Sprawdzić czy pochodna funkcji*

$$f(x) = \begin{cases} x + x^3\cos\frac{1}{x^2} & \textit{jeśli} \quad x \neq 0, \\ 0 & \textit{jeśli} \quad x = 0 \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

Zadanie 14. *Zakładając, że funkcja* f *jest różniczkowalna w punkcie* a, *obliczyć granicę*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(f(a+\frac{1}{n}) - f(a)\right).$$

Czy istnienie powyższej granicy implikuje istnienie pochodnej w punkcie a*?*

Zadanie 15. *Wyznaczyć parametry* a, b, c *i* d *tak aby funkcja*

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \textit{jeśli} \quad x \leq 0, \\ cx^2 + dx & \textit{jeśli} \quad 0 < x \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{x} & \textit{jeśli} \quad x > 1. \end{cases}$$

miała pochodną na całym zbiorze liczb rzeczywistych.

Zadanie 16. *Znaleźć równanie stycznej (jeśli istnieje) do wykresu funkcji* f *w punkcie o odciętej* $x_0 = 0$ *jeśli*

(a) $f(x) = \mathrm{arctg}(2x)$, **(b)** $f(x) = \sqrt{1-\cos(x\sqrt{2})}$.

Zadanie 17. *Niech* $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 2]$. *Wyznaczyć punkty, w których styczna do wykresu funkcji* f *jest równoległa do prostej przechodzącej przez punkty* $(-1, 1)$ *oraz* $(2, 4)$.

ODPOWIEDZI:

2. (a) 27 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{144}$ (d) 0 (e) $\frac{2}{3}$ (f) $\frac{1}{2}$

3. (a) nie jest ciągła w punktach $x \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ (b) ciągła (c) nie jest ciągła w punktach postaci $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (d) ciągła

4. $a = b = 2$

5. (a) $y = 1$ - asymptota pozioma obustronna; $x = 1$ - asymptota pionowa obustronna (b) $y = e^{-1/2}$ - asymptota pozioma obustronna; $x = 2$ - asymptota pionowa lewostronna; $x = -2$ - asymptota pionowa prawostronna

6. WSKAZÓWKA: Dwukrotnie wykorzystać własność Darboux dla funkcji $f(x) = \mathrm{e}^x - 1 - 2x$ lub zauważyć jeden pierwiastek i tylko raz skorzystać z własności Darboux by udowodnić istnienie drugiego

7. Funkcje jednostajnie ciągłe: (a), (b), (c), (f), pozostałe nie są: (d) nie, bo np. $x = \frac{1}{2n}$, $y = \frac{1}{2n+1/2}$, (e) nie, bo np. $x = e^{-n}$, $y = e^{-n-1}$ nie spełniają warunku z definicji jednostajnej ciągłości

8. (a) $(-6x^3 + 6x^2 + 20x - 14)e^{-x^2+2x+1}$ (b) $-2xe^{-x^2}\ln x + \frac{1}{x}e^{-x^2}$ (c) $\frac{3}{x}\ln^2 x + e^{-x}$
(d) $e^{\sqrt{\sin x}}\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ (e) $\frac{-\frac{1}{x^2}e^{1/x}-1}{e^{1/x}-x}$ (f) $20\sin^3 x\cos x - 8\cos 4x$ (g) $\frac{1}{x^3\sqrt{1-1/x^2}}$
(h) $\frac{2x}{5(x^2+2)}$ (i) $\frac{2}{3x\ln 10}$ (j) $\frac{7^{\sqrt{x}}\ln 7}{2\sqrt{x}}$ (k) $\frac{ctgx\cdot\ln(1-x)+\frac{1}{1-x}\ln(\sin x)}{\ln^2(1-x)}$ (l) $6x(\mathrm{tg}x)^{3x^2}\left[\ln(\mathrm{tg}x) + \frac{x}{\sin(2x)}\right]$

9. $f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ dla $|x| > 1$.

10. Nie istnieje pochodna tej funkcji w $x = 0$.

11. $f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2\sqrt{-x}} & \text{dla} \quad x < 0, \\ \text{nie istnieje} & \text{dla} \quad x = 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$

12. $-\frac{1}{2}$

13. Pochodna nie jest ciągła.

14. $f'(a)$, nie implikuje.

15. $a = -1, b = 0, c = 1, d = -1$, WSKAZÓWKA: funkcja, która jest różniczkowalna, musi być ciągła.

16. (a) $y = 2x$, (b) nie istnieje

17. Jest jeden taki punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.