Zadania domowe z Analizy Matematycznej I - część 3 (twierdzenie Lagrange'a, reguła de l'Hospitala, wzór Taylora, ekstrema funkcji, całka nieoznaczona)

Zadanie 1. *Udowodnić nierówności*

$$\textbf{(a)}\quad \frac{y-x}{y} < \ln\frac{y}{x} < \frac{y-x}{x} \qquad \textit{dla}\quad 0<x<y,$$

$$\textbf{(b)}\quad py^{p-1}(x-y) \le x^p - y^p \le px^{p-1}(x-y) \qquad \textit{dla}\quad 0<y<x \quad \textit{oraz}\quad p>1,$$

$$\textbf{(c)}\quad \frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha} < \mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha < \frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta} \qquad \textit{dla}\quad 0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}.$$

Zadanie 2. *Obliczyć*

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[7]{x}\ln x$, **(b)** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$, **(c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\mathrm{arctg}x - \dfrac{\pi}{2}\right)x$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$, **(e)** $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x}$, **(f)** $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+7x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$, **(g)** $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2}}$,

(h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\mathrm{arctg}x\right)^x$, **(i)** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(2x))^{\frac{1}{\sin(3x)}}$, **(j)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{arctg}\,x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Zadanie 3. *Sumując trzy początkowe składniki we wzorze Taylora dla funkcji* $\ln(1+x)$ *obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia* $\ln(1,2)$. *Podać oszacowanie błędu tego przybliżenia.*

Zadanie 4. *Korzystając ze wzoru Taylora dla funkcji* $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$ *obliczyć wartość* $\sqrt[3]{0,97}$ *z dokładnością do* 10^{-5}. *Ile składników rozwinięcia należy zsumować aby uzyskać żądaną dokładność?*

Zadanie 5. *Korzystając ze wzoru Taylora z resztą Peano obliczyć granicę*

$$\lim_{x\to+\infty}\left((x^3-x^2+\tfrac{x}{2})e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6+1}\right).$$

Zadanie 6. *Niech*

$$f(x) = \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+..+\frac{x^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

Wyznaczyć $\inf_{x\in(0,+\infty)} f(x)$ *oraz* $\sup_{x\in(0,+\infty)} f(x)$.

Zadanie 7. *Wyznaczyć ekstrema i przedziały monotoniczności funkcji*

(a) $f(x) = x - 2\mathrm{arctg}x$, **(b)** $f(x) = xe^{-x^3}$, **(c)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Zadanie 8. *Pokazać, że prawdziwe są następujące równania i nierówności*

(a) $2\mathrm{arctg}x + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \pi$ *dla* $x\ge 1$, **(b)** $\mathrm{arctg}x + \mathrm{arctg}\dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{\pi}{4}$ *dla* $x>-1$,

(c) $x(2+\cos x) > 3\sin x$ *dla* $x>0$, **(d)** $e^x < 1+xe^x$ *dla* $x>0$, **(e)** $1-\dfrac{x^2}{2!} < \cos x$ *dla* $x\ne 0$.

Zadanie 9. *Wyznaczyć asymptoty funkcji*

(a) $f(x) = \dfrac{e^x}{4-x^2}$, **(b)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Zadanie 10. *Zbadać przebieg zmienności i naszkicować wykresy funkcji*

(a) $f(x) = \dfrac{x}{\ln^2 x}$, **(b)** $f(x) = \exp\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

Zadanie 11. *Obliczyć całki*

(a) $\int (\operatorname{tg} x)^2 dx$, **(b)** $\int (2x-3)^{10} dx$, **(c)** $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$, **(d)** $\int \frac{dx}{\cosh x}$,

(e) $\int \sin^5 x \cos x dx$, **(f)** $\int \frac{x dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$, **(g)** $\int \frac{(\arcsin x)^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$, **(h)** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1}$,

(i) $\int \ln x dx$, **(j)** $\int x \cos x dx$, **(k)** $\int x^2 e^{1-x} dx$, **(l)** $\int 8x^2 e^{4-x^3} dx$.

Zadanie 12. *Obliczyć następujące całki z funkcji wymiernych*

(a) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$, **(b)** $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} dx$, **(c)** $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)} dx$, **(d)** $\int \frac{x dx}{x^3-1}$.

Zadanie 13. *Wyprowadzić wzory rekurencyjne dla całek*

(a) $\int (\ln x)^n dx$, **(b)** $\int \cos^n x dx$.

Zadanie 14. *Obliczyć całki z wyrażeń trygonometrycznych*

(a) $\int \sin^2 x dx$, **(b)** $\int \sin^5 x dx$, **(c)** $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$, **(d)** $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$,

(e) $\int \cos 3x \cos 5x \ dx$, **(f)** $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x}$, **(g)** $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}$, **(h)** $\int \frac{2+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx$.

Zadanie 15. *Obliczyć całki zawierające pierwiastki*

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}$, **(b)** $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$, **(c)** $\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx$, **(d)** $\int x^4 \sqrt{1-x^2} dx$.

ODPOWIEDZI:

1. Skorzystać z twierdzenia Lagrange'a dla funkcji (a) $f(x) = \ln x$, (b) $f(x) = x^p$, (c) $f(x) = \operatorname{tg} x$.

2. **(a)** 0, **(b)** $-\frac{1}{2}$, **(c)** -1, **(d)** $\frac{1}{6}$, **(e)** 1, **(f)** 1, **(g)** $e^{\frac{2}{\pi}}$, **(h)** $e^{-2/\pi}$, **(i)** 1, **(j)** $e^{-\frac{1}{3}}$

3. $0,18$; $|R_3(\frac{2}{10})| \leq \frac{8}{3000}$

4. $\approx 0,9899$, wystarczy zsumować 3 składniki.

5. $\frac{1}{6}$

6. 0 i 1 (WSKAZÓWKA: Wykazać, że f jest malejąca na $(0, \infty)$.)

7. **(a)** $f_{max}(-1) = \frac{\pi}{2} - 1$, $f_{min}(1) = 1 - \frac{\pi}{2}$, rośnie w przedziałach $(-\infty, -1)$ oraz $(1, \infty)$, maleje dla $x \in (-1, 1)$
(b) $f_{max}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} e^{-\frac{1}{3}}$, rośnie dla $x \in \left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)$, maleje dla $x \in \left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \infty\right)$
(c) $f_{max}(e) = \frac{1}{e}$, rośnie dla $x \in (0, e)$, maleje dla $x \in (e, \infty)$

8. WSKAZÓWKI:
(a) rozpatrzyć funkcję $f(x) = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ i zauważyć, że jest ona stała na $[1, \infty)$ oraz $f(1) = \pi$,
(c) można rozpatrzyć funkcję $f(x) = x - \frac{3\sin x}{2+\cos x}$ i zauważyć, że jest ona rosnąca na $(0, \infty)$ oraz $f(0) = 0$,
(d) można postąpić analogicznie jak w zadaniu 8c) rozpatrując na przykład funkcję $f(x) = 1 + xe^x - e^x$,
(e) można rozpatrzyć funkcję $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!}$ i wyznaczyć jej ekstrema.

9. (a) $y = 0$ to asymptota pozioma lewostronna, $x = 2, x = -2$ to asymptoty pionowe obustronne
(b) $y = 0$ to asymptota pozioma prawostronna, $x = 0$ to asymptota pionowa prawostronna

10. (a) $D = (0,1) \cup (1,\infty)$, $x = 1$ to asymptota pionowa obustronna, f jest rosnąca w przedziałach $(0,1)$ i (e^2,∞), f jest malejąca w przedziale $(1,e^2)$, $f_{min}(e^2) = \frac{e^2}{4}$, f jest ściśle wypukła w przedziałach $(0,1)$ i $(1,e^3)$, f jest ściśle wklęsła w przedziale (e^3,∞), punkt przegięcia to $(e^3, \frac{1}{9}e^3)$.

(b) $D = R \setminus \{1\}$, $x = 1$ to asymptota pionowa prawostronna, $y = e$ to asymptota pozioma obustronna, f jest malejąca w przedziałach $(-\infty,1)$ i $(1,\infty)$, f jest ściśle wklęsła w przedziale $(-\infty,\frac{1}{2})$, f jest ściśle wypukła w przedziale $(\frac{1}{2},\infty)$, punkt przegięcia to $(\frac{1}{2},\frac{1}{e})$.

11. (a) $F(x) = \operatorname{tg} x - x + C$
(b) $F(x) = \frac{1}{22}(2x-3)^{11} + C$
(c) $t = \sqrt{x} \ \Rightarrow\ \int \frac{2t\,dt}{t+2} = 2\sqrt{x} - 4\ln(\sqrt{x}+2) + C$
(d) $F(x) = 2\operatorname{arctg} e^x + C$
(e) $F(x) = \frac{1}{6}\sin^6 x + C$
(f) $t = x^2 - 1 \ \Rightarrow\ F(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + C$
(g) $F(x) = \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 + C$
(h) $t = \sqrt[3]{x} \ \Rightarrow\ \int \frac{3t^2\,dt}{t+1} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} + 3\ln|\sqrt[3]{x}+1| + C$
(i) $F(x) = x\ln x - x + C$
(j) $F(x) = x\sin x + \cos x + C$
(k) $F(x) = -(x^2+2x+2)e^{1-x} + C$
(l) $F(x) = -\frac{8}{3}e^{4-x^3} + C$

12. (a) $F(x) = \ln|x| - \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C$
(b) $F(x) = x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$
(c) $F(x) = x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$
(d) $F(x) = \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

13. (a) całkowanie przez części $(u = \ln^n x, v' = 1) \Rightarrow I_n = \int(\ln x)^n dx = \begin{cases} x + C, & n = 0 \\ x\ln^n x - nI_{n-1}, & n = 1,2,\ldots \end{cases}$

(b) $J_n = \int \cos^n x dx = \begin{cases} x + C, & n = 0 \\ \sin x + C, & n = 1 \\ \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}J_{n-2}, & n = 2,3,\ldots \end{cases}$

14. (a) $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$
(b) $t = \cos x \ \Rightarrow\ F(x) = -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x + C$
(c) $t = \sin x \ \Rightarrow\ F(x) = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C$
(d) $F(x) = \frac{1}{6}\sin^5 x\cos x + \frac{1}{24}\sin^3 x\cos x - \frac{1}{32}\sin 2x + \frac{1}{16}x + C$, (skorzystać z zadania 9.4a z ćwiczeń)
(e) $F(x) = \frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$
(f) $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \ \Rightarrow\ \int \frac{-dt}{(t-2)(2t+1)} = -\frac{1}{5}\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2| + \frac{1}{5}\ln|2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1| + C$
(g) $t = \operatorname{tg}x \ \Rightarrow\ \int \frac{dt}{t^3-1} = \frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{6}\ln|t^2+t+1| - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}[\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})] + C$, gdzie $t = \operatorname{tg}x$
(h) $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \ \Rightarrow\ \int \frac{t^2+t+1}{t}dt = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C$

15. (a) $t = \sqrt[4]{5-x} \ \Rightarrow\ \int \frac{-4t^2\,dt}{t+1} = -2\sqrt{5-x} + 4\sqrt[4]{5-x} - 4\ln(\sqrt[4]{5-x}+1) + C$
(b) $F(x) = \arcsin(x-1) + C$
(c) $F(x) = 3\sqrt{x^2-4x+5} + 7\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}| + C$
(d) $F(x) = (\frac{x^5}{6} - \frac{x^3}{24} - \frac{x}{16})\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{16}\arcsin x + C$, (zastosować metodę współczynników nieoznaczonych)