2. Indukcja matematyczna. Nierówności. Kresy zbiorów.

1. Udowodnić nierówności:

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|, \qquad ||x|-|y|| \leqslant |x-y|.$$

2. Stosując zasadę indukcji udowodnić prawdziwość poniższych wzorów dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2,$$

$$1^2+2^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n > 1$. Udowodnić nierówność:

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) > 1+x_1+x_2+...+x_n,$$

gdzie $x_1, .., x_n$ są liczbami tego samego znaku różnymi od 0 i większymi od -1.
Następnie z udowodnionej nierówności wyprowadzić nierówność Bernoulliego:
dla dowolnego $x > -1$ i $n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

Przy jakich warunkach na x i n ta nierówność jest ostra?

4. Udowodnić, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ zachodzi wzór:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

5. Korzystając z definicji kresów wykazać, że

$$\inf\{1+\tfrac{1}{n}: \ n \in \mathbb{N}\} = 1,$$

$$\sup\{x \in \mathbb{Q}: \ x > 0 \text{ i } x^2 < 2\} = \sqrt{2}.$$

6. Udowodnić, że dla dowolnych niepustych, ograniczonych z góry zbiorów $A, B \subset \mathbb{R}$

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B,$$

gdzie $A+B = \{a+b: \ a \in A, b \in B\}$.
Jaki jest kres górny zbioru $A \cup B$? Odpowiedź uzasadnić.

7. Udowodnić, że dla dowolnego niepustego, ograniczonego zbioru $A \subset \mathbb{R}$

$$\inf(-A) = -\sup A, \text{ gdzie } -A = \{-a : a \in A\}.$$

8. Niech $A \subset \mathbb{R}$ i niech $f : A \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną, tzn. taką, której zbiór wartości jest ograniczony. Kresem górnym (odpowiednio dolnym) funkcji f nazywamy kres górny (odpowiednio dolny) jej zbioru wartości, oznaczamy $\sup_{x\in A} f(x)$ (odpowiednio $\inf_{x\in A} f(x)$).
Niech $f, g : A \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ograniczonymi. Udowodnić następujące nierówności

$$\text{a)} \quad \sup_{x\in A}(f(x)+g(x)) \leqslant \sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A} g(x),$$

$$\text{b)} \quad |\sup_{x\in A} f(x) - \sup_{x\in A} g(x)| \leqslant \sup_{x\in A}|f(x)-g(x)|.$$

Podać przykłady funkcji, dla których powyższe nierówności są ostre.