3. Ciągi liczbowe

1. Zbadać monotoniczność ciągów:
a) $a_n = n^2 - n + 2$,
b) $b_n = n^2 - 10n + 10$,
c) $c_n = \frac{10^n}{n!}$,
d) $\begin{cases} d_1 = 2 \\ d_{n+1} = \sqrt{4 + d_n}, \quad n \geq 1. \end{cases}$

2. Bezpośrednio z definicji wykazać, że

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \frac{1-2n}{n+2} = -2, \qquad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{5+2^n} = 1.$$

3. Udowodnić, że

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{n!} = 0,$$

b) jeśli a_n to ciąg o wyrazach nieujemnych i $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, to mamy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[5]{a_n} = \sqrt[5]{a}$.

4. Obliczyć granice:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \left(n - \sqrt{n^2+5n}\right), \quad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^4+3n^2} - \sqrt{n^4-2n^2+n}\right), \quad \text{c) } \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt[3]{n}} - \sqrt{n}\right),$$

$$\text{d) } \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{n^3+n} - n\right), \quad \text{e) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+5}, \quad \text{f) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^n+(-3)^n}, \quad \text{g) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^2+2^2+..+n^2},$$

$$\text{h) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + .. + \frac{n}{n^2+n}\right), \quad \text{i) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{n+1}+\sin n}, \quad \text{j) } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\sin n}{n^2+\cos n^3},$$

$$\text{k) } \lim_{n\to\infty} \frac{6+9^{n+1}}{5^n+3^{2n-1}}, \quad \text{l) } \lim_{n\to\infty} \frac{1+a+..+a^n}{1+b+..+b^n} \quad \text{gdzie } |a|<1, \quad |b|<1,$$

$$\text{m) } \lim_{n\to\infty} (\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})..(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}), \quad \text{n) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + .. + \frac{1}{n(n+1)}\right).$$

5. Uzasadnić zbieżność i obliczyć granicę ciągu a_n określonego wzorami

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \text{ dla } n \geq 1.$$

6. Niech ciąg x_n będzie określony rekurencyjnie wzorem:

$$x_1 = c \geq 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right).$$

Wykazać, że ten ciąg jest zbieżny i obliczyć jego granicę.

7. Zbadać zbieżność ciągu a_n i obliczyć jego granicę, jeśli istnieje, gdy

$$\begin{cases} a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = 2 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

8. Udowodnić, że

a) jeśli a_n jest ciągiem takim, że $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, to $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$;

b) jeśli a_n jest ciągiem takim, że $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, to $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

9. Obliczyć:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{n}, \qquad \text{b) } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{1+n}, \qquad \text{c) } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+4}{n^3+2}\right)^{2n^3},$$

$$\text{d) } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}, \qquad \text{e) } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \qquad \text{f) } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-7}{n^2+2}\right)^{n^2+5}.$$

10. Udowodnić, że ciąg $d_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ jest malejący.

11. Udowodnić, że poniższe ciągi są rozbieżne:

$$\text{a) } a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, \qquad \text{b) } b_n = \sin\frac{2n\pi}{3}, \qquad \text{c) } c_n = \frac{n+2}{n+5}(-1)^{n(n+1)/2}.$$

12. Czy prawdziwa jest implikacja:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0 \implies \left(\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ lub } \lim_{n\to\infty} b_n = 0\right)?$$

13. Obliczyć granicę górną i dolną ciągów:

$$\text{a) } \quad a_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}, \qquad \text{b) } \quad b_n = \frac{n^2}{n^2+1}\sin\frac{2\pi n}{3},$$

$$\text{c) } \quad c_n = (-1)^n\left(1+\frac{2}{n}\right)^n + \cos\frac{n\pi}{4}, \qquad \text{d) } \quad d_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+i}}.$$