4. Granica i ciągłość funkcji.

FAKT. Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ mamy

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^a\,.$$

1. Wykazać, że nie istnieje granica: $\lim_{x\to 0^-}\cos\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

2. Obliczyć granice (jeśli istnieją):

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}} \qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3}-1}$$

$$\text{c)}\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{\sin x}{x} \qquad \text{d)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}$$

$$\text{e)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} \qquad \text{f)}\quad \lim_{x\to\infty} x^2(1-\cos(1/x)) \qquad \text{g)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x+\operatorname{tg} x}$$

$$\text{h)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\sqrt{\cos x}}}{x} \qquad \text{i)}\quad \lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$$

$$\text{j)}\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) \qquad \text{k)}\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} \qquad \text{l)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}$$

3. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach obliczyć granice:

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] \qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}.$$

4. Wykazać, że prosta o równaniu $y = mx+k$, gdzie $m, k \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, jest asymptotą ukośną prawostronną funkcji f wtedy i tylko wtedy gdy

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad \text{i} \qquad k = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx).$$

5. Wyznaczyć asymptoty funkcji:

$$\text{a)}\quad f(x) = \frac{x^2-1}{2+x} \qquad \text{b)}\quad f(x) = x - \operatorname{arctg} 2x.$$

6. Zbadać ciągłość funkcji

$$\text{a)}\quad f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R} \quad f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{1+x^n} \qquad \text{b)}\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{nx}+1}{xe^{nx}+2}$$

7. Niech $f: D\to\mathbb{R}$, gdzie $D\subset\mathbb{R}$. Wykazać, że jeśli f jest ciągła w punkcie $x_0\in D$, to funkcja $|f|$ też jest ciągła w x_0.

8. Wykazać, że funkcja dana poniższym wzorem jest ciągła jedynie w punkcie $a=0$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x\in\mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

9. Dobrać wartości parametrów a i b tak, aby funkcja dana poniższym wzorem była ciągła na $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - x}{x} & \text{dla } x < 0 \\ a & \text{dla } x = 0 \\ b + \frac{1-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt[3]{x+1}} & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

10. Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą w pewnym punkcie $x_0 \in (a, b)$ i taką, że $f(x_0) > 0$. Udowodnić, że wówczas istnieje przedział $(c, d) \subset (a, b)$ zawierający x_0 taki, że dla dowolnego $x \in (c, d)$ $f(x) > 0$.

11. Korzystając z własności Darboux udowodnić, że równanie
a) $e^{-x} = \sin \frac{\pi x}{2}$ b) $3^x + x = 3$
ma rozwiązanie w przedziale $(0, 1)$.

12. Zbadać jednostajną ciągłość funkcji:

$$\text{a) } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$$

$$\text{b) } f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2}{x}$$

$$\text{c) } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$$

$$\text{d) } f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x^2$$

$$\text{e) } f : [-5, 5] \to \mathbb{R},\ f(x) = 3|1 - |x - 2||$$

$$\text{f) } f : [0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}.$$

Czy funkcja z przykładu (f) spełnia warunek Lipschitza na $[0, +\infty)$?