5. Pochodna funkcji jednej zmiennej.

1. Zbadać różniczkowalność funkcji $f(x) = |x|^3$ na $\mathbb{R}$.

2. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = x|2-x|$ w punktach w których pochodna ta istnieje.

3. Wykazać, że funkcja dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{jeżeli } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{jeżeli } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ma pochodną tylko w punkcie $x = 0$.

4. Zbadać różniczkowalność funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{jeżeli } x \neq 0 \\ 0 & \text{jeżeli } x = 0 \end{cases} .$$

5. Wyprowadzić wzory na pochodne funkcji $\cos x$ i $\operatorname{ctg} x$.

6. Obliczyć pochodne podanych funkcji w ich naturalnych dziedzinach:

a) $f(x) = 1 - 2\operatorname{ctg}(x^3 + 2x^2 - 2x + 12\pi)$ **b)** $f(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \cos x^2$ **d)** $f(x) = x^{3\sin x + 1}$ **e)** $f(x) = \log_{x^4+1}(3\operatorname{tg} x - x^2)$.

7. Wyznaczyć pochodne funkcji $\arcsin x$ i $\operatorname{arctg} x$ korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej. Następnie obliczyć pochodne podanych niżej funkcji w ich naturalnych dziedzinach:

a) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{1-x^2}$ **b)** $f(x) = \arcsin(\ln \frac{1}{x})$.

8. Zakładając, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 obliczyć

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}.$$

Czy z istnienia powyższej granicy wynika, że f jest różniczkowalna w punkcie x_0?

9. Obliczyć pochodną funkcji f danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases} .$$

Czy f' jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}$?

10. Wyznaczyć wzór na n-tą pochodną funkcji $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.

11. Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{\ln(3-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 4$ lub wykazać, że taka styczna nie istnieje.

12. Dobrać parametr $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tak aby krzywa o równaniu $y = c(1+x^2)\ln x$ przecinała oś OX pod kątem α.