6. Twierdzenia Rolle'a i Lagrange'a. Elementy badania funkcji.

1. Stosując twierdzenie Lagrange'a, udowodnić nierówności:

a) $|\cos x - \cos y| \leq |x-y| \quad \text{dla} \quad x, y \in \mathbb{R}$

b) $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x \quad \text{dla} \quad x > -1.$

2. Funkcja $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ ma wartość 0 w $x = 1$ i $x = -1$, ale $f'(x) \neq 0$ dla $x \in [-1, 1]$. Czy przeczy to twierdzeniu Rolle'a?

3. Niech $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Udowodnić, że jeśli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ma ograniczoną pochodną na (a, b), to jest ona jednostajnie ciągła na (a, b). Czy każda jednostajnie ciągła i różniczkowalna funkcja na (a, b) musi mieć ograniczoną pochodną na (a, b)?

4. Udowodnić, że

a) $\forall_{x>0} \ \forall_{k\in\mathbb{N}} \quad \ln x < k\sqrt[k]{x},$

b) $\forall_{x>0} \quad \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} + \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2},$

c) $\forall_{x>0} \quad \ln(1+x) > \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x}.$

5. Czy funkcja $f(x) = \operatorname{arctg} x$ jest jednostajnie ciągła w swojej dziedzinie?

6. Wyznaczyć liczbę rozwiązań równania

$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 7 = 0.$$

7. Korzystając z metod rachunku różniczkowego, wyznaczyć największy wyraz ciągu

$$a_n = \sqrt[n]{n}.$$

8. Niech

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

(a) Obliczyć $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ i $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
(b) Wyznaczyć przedziały monotoniczności wykresu funkcji f.