

7. Reguła de l'Hospitala i nie tylko.

1. Obliczyć:

a)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(3x) - 3 \arcsin x}{x^3}$$

b)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

c)
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/\ln(e^x - 1)}$$

d)
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$$

e)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{1/x}$$

f)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

2. Wyznaczyć asymptoty funkcji $f(x) = x \exp\left(\frac{-1}{x+2}\right)$.

3. Udowodnić, że

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2e}} \leq x e^{-x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

4. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{jeżeli } x \neq 0 \\ 0 & \text{jeżeli } x = 0 \end{cases}$$

a) jest trzykrotnie różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$,b)* jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.5. Wyznaczyć asymptoty funkcji f oraz jej przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne, jeśli

a) $f(x) = \ln^3 x - 3 \ln x,$ b) $f(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}.$