8. Wzór Taylora. Badanie funkcji.

1. Korzystając ze wzoru Taylora z resztą Peano obliczyć granice:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \qquad \text{b) } \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$$

$$\text{c) } \lim_{x\to+\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right).$$

2. Udowodnić, że wzór

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \qquad \text{dla} \quad x \in [0,1]$$

przybliża wartość pierwiastka z błędem nieprzekraczającym $\frac{1}{16}$.

3. Z jaką dokładnością wzór

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + .. + \frac{x^n}{n!}$$

przybliża wartość e^x? Oszacować błąd przybliżenia dla $x \in [0,1]$.

4. Dla jakich x wzór

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

przybliża wartość $\cos x$ z błędem mniejszym niż 10^{-4}?

5. Korzystając ze wzoru Taylora obliczyć $(1,1)^{1,2}$ z błędem nieprzekraczającym 10^{-3}.

6. Zbadać przebieg zmienności i naszkicować wykresy funkcji (oczywiście należy wykorzystać to, co już wiemy z zadania 7.5):

$$\text{a) } f(x) = \ln^3 x - 3\ln x, \qquad \text{b)} f(x) = \begin{cases} x\,e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}.$$