Wykład 6: Test t-Studenta

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ o nieznanej wartości oczekiwanej $EX_1 = \mu$ i nieznanej wariancji $Var(X_1) = \sigma^2 > 0$. Na poziomie istotności α chcemy zweryfikować hipotezę $H_0 : \mu = \mu_0$ przeciwko
(a) $H_1 : \mu < \mu_0$,
(b) $H_1 : \mu > \mu_0$,
(c) $H_1 : \mu \neq \mu_0$.
Wiemy, że średnia próbkowa $\bar{X}$ jest dobrym estymatorem średniej populacyjnej μ – w wykładzie 4 pokazaliśmy, że $\bar{X}$ to estymator nieobciążony i mocno zgodny parametru μ. Zatem rozsądnym jest wnioskowanie dotyczące średniej populacyjnej μ oprzeć na średniej próbkowej $\bar{X}$. Za statystykę testową przyjmiemy więc pewną funkcję $\bar{X}$. Dokładniej będzie to następująca funkcja

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}, \qquad \text{gdzie} \qquad S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}. \tag{1}$$

Właśnie taka funkcja jest wygodna, bo można pokazać, że jeśli H_0 jest prawdziwa, to powyżej zdefiniowane T jest zmienną losową o rozkładzie t-Studenta z $(n-1)$-stopniami swobody.

Roważmy najpierw problem (a) czyli weryfikację $H_0 : \mu = \mu_0$ przeciwko $H_1 : \mu < \mu_0$. Wtedy małe wartości $\bar{X}$, czyli równoważnie małe wartości T, będą przemawiać za odrzuceniem H_0. Stąd zbiór krytyczny będzie postaci

$$W = (-\infty, c],$$

gdzie c musimy dobrać tak by poziom istotności testu wynosił α. Ponieważ H_0 jest hipotezą prostą, to poziom istotności testu dany jest wzorem

$$P(\text{test odrzuci } H_0|H_0) = P(T \in W|H_0) = P(T \leqslant c|H_0)$$

i potrzebujemy by

$$P(T \leqslant c|H_0) = \alpha. \tag{2}$$

Jak już zauważyliśmy, jeśli H_0 jest prawdziwa, to T ma rozkład t-Studenta z $(n-1)$-stopniami swobody. Zatem na mocy (2) c to kwantyl rzędu α rozkładu t-Studenta o $(n-1)$-stopniach swobody, który będziemy oznaczać $t_{\alpha,n-1}$. Ponieważ rozkład t-Studenta jest symetryczny, to $t_{\alpha,n-1} = -t_{1-\alpha,n-1}$. Reasumując szukany test to test o statystyce testowej T zdefiniowanej w (1) i o zbiorze krytycznym

$$W = (-\infty, -t_{1-\alpha,n-1}].$$

Teraz rozpatrzmy problem (b) czyli weryfikację $H_0 : \mu = \mu_0$ przeciwko $H_1 : \mu > \mu_0$. W tym przypadku duże wartości $\bar{X}$, czyli równoważnie duże wartości T, będą przemawiać za odrzuceniem H_0. Stąd zbiór krytyczny będzie postaci

$$W = [d, +\infty),$$

gdzie d dobieramy tak by poziom istotności testu wynosił α:

$$P(\text{test odrzuci } H_0|H_0) = P(T \in W|H_0) = P(T \geqslant d|H_0) = \alpha.$$

Wtedy

$$P(T \leqslant d|H_0) = 1 - P(T > d|H_0) = 1 - P(T \geqslant d|H_0) = 1 - \alpha,$$

co oznacza, że d jest kwantylem rzędu $1-\alpha$ rozkładu t-Studenta o $(n-1)$-stopniach swobody: $d = t_{1-\alpha,n-1}$ (znowu skorzystaliśmy z tego, że jeśli H_0 jest prawdziwa, to T ma rozkład t-Studenta o $(n-1)$-stopniach swobody). Reasumując szukany test to test o statystyce testowej T zdefiniowanej w (1) i o zbiorze krytycznym

$$W = [t_{1-\alpha,n-1}, +\infty).$$

Pozostał nam problem (c) czyli weryfikacja $H_0 : \mu = \mu_0$ przeciwko $H_1 : \mu \neq \mu_0$. W tym przypadku wartości $\bar{X}$ odległe od μ_0, czyli równoważnie wartości T odległe od 0, będą przemawiać za odrzuceniem H_0. Stąd zbiór krytyczny będzie postaci

$$W = (-\infty, b_1] \cup [b_2, +\infty),$$

gdzie b_1 i b_2 muszą być takie, aby poziom istotności testu wynosił α:

$$\begin{aligned} P(\text{test odrzuci } H_0|H_0) &= P(T \in W|H_0) = P(T \leqslant b_1 \text{ lub } T \geqslant b_2|H_0) = \\ &= P(T \leqslant b_1|H_0) + P(T \geqslant b_2|H_0) = \alpha. \end{aligned}$$

Na ogół ujemne i dodatnie wartości T chcemy traktować tak samo i wtedy żądamy by

$$P(T \leqslant b_1|H_0) = \alpha/2 \text{ and } P(T \geqslant b_2|H_0) = \alpha/2.$$

Równoważnie potrzebujemy aby

$$P(T \leqslant b_1|H_0) = \alpha/2 \text{ and } P(T \leqslant b_2|H_0) = 1 - \alpha/2,$$

co oznacza, że b_1 jest kwantylem rzędu $\alpha/2$ zaś b_2 – kwantylem rzędu $1 - \alpha/2$ rozkładu t-Studenta o $(n-1)$-stopniach swobody: $b_1 = t_{\alpha/2,n-1} = -t_{1-\alpha/2,n-1}, b_2 = t_{1-\alpha/2,n-1}$ (ponownie skorzystaliśmy z tego, że jeśli H_0 jest prawdziwa, to T ma rozkład t-Studenta o $(n-1)$-stopniach swobody). Zatem szukany test to test o statystyce testowej T zdefiniowanej w (1) i o zbiorze krytycznym

$$W = (-\infty, -t_{1-\alpha/2,n-1}] \cup [t_{1-\alpha/2,n-1}, +\infty).$$

Uwaga 6.1. Pokazuje się, że testu t-Studenta można używać także wtedy, gdy $X_1, X_2, \ldots, X_n$ to próba losowa z dowolnego rozkładu o nieznanej wartości oczekiwanej $EX_1 = \mu$ i nieznanej wariancji $Var(X_1) = \sigma^2 > 0$, jednak jedynie wtedy, gdy próba ta jest duża ($n \geqslant 100$). Zatem założenie o normalności można opuścić pod warunkiem, że dysponujemy dużą próbą.

Przykład 6. 1. Dział kontroli jakości w zakładach chemicznych chce oszacować średnią wagę proszku do prania sprzedawanego w pudełkach o nominalnej wadze 3 kg. Pobrano w tym celu próbkę losową 7 pudełek i otrzymano wyniki (w kg): 2.93, 2.97, 3.05, 2.91, 3.02, 2.87, 2.92. Wiadomo, że rozkład wagi pudełka proszku do prania jest normalny.
(a) Czy na poziomie istotności 0,05 można twierdzić, że faktyczna średnia waga pudełka proszku do prania jest mniejsza niż 3 kg?
(b) Zakładając, że rzeczywista średnia waga pudełka proszku do prania wynosi 2,9 kg, wyznaczyć prawdopodobieństwo, że przeprowadzając test na poziomie istotności 0,05 i na podstawie 7 obserwacji, błędnie uznamy, że średnia waga pudełka jest zgodna z podaną na pudełku.