1. Prawdopodobieństwo

1. Podać definicję σ-ciała. Niech $\Omega = [0, 2]$. Czy rodzina $R = \{\emptyset, \Omega, [0, 1], (1, 2], \left[0, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2}, 2\right]\}$ jest σ-ciałem podzbiorów Ω? Jeśli nie, to uzupełnić ją tak, aby nią była.

2. Udowodnić wzór włączeń i wyłączeń dla 3 zdarzeń. Korzystając z tego wzoru, rozwiązać następujące zadanie.

Aby zakwalifikować się do drugiego etapu teleturnieju trzeba odpowiedzieć poprawnie na przynajmniej jedno z trzech zadanych pytań (każde z pytań dotyczy innej dziedziny). Z dotychczasowych obserwacji wynika, że prawdopodobieństwo udzielenia poprawnej odpowiedzi na każde z pytań jest jednakowe i wynosi $\frac{1}{3}$ oraz odpowiadanie na pytania z różnych dziedzin to zdarzenia niezależne. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba, która zgłosiła się do udziału w teleturnieju, zakwalifikuje się do drugiego etapu?

3. W schronisku są 3 pokoje: czteroosobowy, trzyosobowy i dwuosobowy. Dziwnym trafem schronisko jest puste, gdy pojawia się grupa 6 turystów i natychmiast zajmuje miejsca całkowicie losowo. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jeden pokój pozostanie wolny?

4. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w rozdaniu brydzowym (52 karty w czterech kolorach po 13 kart w każdym, rozdanie: po 13 kart każdemu z 4 graczy) wszystkie asy trafią do jednego gracza.

5. Łamiemy patyk w 2 losowo wybranych punktach. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że każda z części będzie krótsza niż połowa patyka.

6. Kawałek drutu długości 20 cm zgięto pod kątem prostym w przypadkowo wziętym punkcie. Następnie zgięto drut jeszcze w dwóch punktach, tak aby utworzyła się ramka prostokątna o obwodzie 20 cm. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pole obszaru ograniczonego ramką nie przekracza 21 cm^2?

7. Rzucamy monetą (niekoniecznie symetryczną: $p \in (0, 1)$ to prawdopodobieństwo wypadnięcia orła) do momentu otrzymania orła. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zabawę zakończymy (a) w k-tym rzucie ($k = 1, 2, \ldots$), (b) w parzystej liczbie rzutów, (c) nie wcześniej niż w r-tym rzucie ($r = 1, 2, \ldots$)?

8. Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucając monetą (niekoniecznie symetryczną: $p \in (0, 1)$ to prawdopodobieństwo wypadnięcia orła) r ($r = 0, 1, \ldots$) reszek poprzedzi uzyskanie n-tego ($n = 1, 2, \ldots$) orła? Z otrzymanego wyniku wyprowadzić wzór

$$\sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+n-1}{r} q^r = \frac{1}{(1-q)^n}, \quad q \in (0, 1),\ n = 1, 2, \ldots.$$

9. W worku jest $(1-p)m$ monet rzetelnych, symetrycznych oraz pm monet, które mają po obu stronach orła. Wyciągamy na chybił trafił jedną monetę, po czym wykonujemy nią n rzutów. We wszystkich wypada orzeł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to moneta nierzetelna?

10. Owad składa k jajeczek z prawdopodobieństwem $p_k = e^{-1}/k!$, $k = 0, 1, \ldots$. Potomek wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem $p \in (0, 1)$, niezależnie od innych. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że (a) wylęgnie się k potomków owada, $k = 0, 1, \ldots$, (b) owad złożył j jajeczek, jeśli wiemy, że wylęgło się k jego potomków, $0 \leqslant k \leqslant j$.