2. Zmienne losowe

1. Zmienna losowa X ma rozkład dany tabelką:

x_k	-1	0	1	2
p_k	$\frac{3}{8}$	C	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

(a) Obliczyć C. (b) Wyznaczyć dystrybuantę X. (c) Obliczyć wartość oczekiwaną, wariancję i odchylenie standardowe X. (d) Podać rozkład zmiennej losowej $Y = |X| + 1$.
WSKAZÓWKA do (d): Mamy: $y = |x| + 1 = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = -1$ lub $x = 1$. Stąd $P(Y = 2) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{3}{4}$ itd.

2. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2 & , \quad 0 < x \leqslant 1 \\ -x+2 & , \quad 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & , \quad x > 2 \text{ lub } x \leqslant 0 \end{cases} .$$

Wyznaczyć C oraz dystrybuantę i wartość przeciętną zmiennej losowej X. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że $X < \frac{3}{2}$. Znaleźć medianę i górny kwartyl X.

3. Wyznaczyć A i B tak aby

$$F(x) = \begin{cases} Ax^2 & \text{dla} \quad x < -1 \\ Bx+1 & \text{dla} \quad x \in [-1, 0) \\ 1 & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

była (a) dystrybuantą, (b) dystrybuantą zmiennej losowej dyskretnej, (c) dystrybuantą zmiennej losowej absolutnie ciągłej - dla wyznaczonych A i B podać gęstość.

WSKAZÓWKA: W przypadku zmiennych losowych absolutnie ciągłych mamy

$$f(x) = F'(x) \quad \text{dla } x \text{, dla których } F \text{ jest różniczkowalna;} \tag{1}$$

dla pozostałych x za $f(x)$ można przyjąć dowolną liczbę nieujemną. Dokładnie rzecz biorąc, równość w (1) można zmienić dla niektórych x (byleby tych x nie było za dużo, w szczególnoci można ją zmienić dla skończonej liczby x) i dla tych x za $f(x)$ przyjąć dowolną liczbę nieujemną. Jednak nie warto komplikować sytuacji i w praktyce się tego nie robi.

4. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} a|x| & \text{dla } x \in (-1, 1) \\ b & \text{dla } x \in (2, 4) \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Wyznaczyć stałe a i b wiedząc, że $EX = 2$.

5. Niech X będzie zmienną losową o dystrybuancie F_X zaś $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Wyrazić za pomocą F_X prawdopodobieństwa (a) $P(X \in (a, b])$, (b) $P(X \in [a, b))$, (c) $P(X \geqslant a)$, (d) $P(X = a)$.

WSKAZÓWKA: Np. $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(\{X \leqslant b\} \setminus \{X < a\}) = P(X \leqslant b) - P(X < a) = = F_X(b) - \lim_{x \to a^-} F_X(x) = F_X(b) - F_X(a^-)$, gdzie $F_X(a^-) := \lim_{x \to a^-} F_X(x)$.

6. Niech X będzie zmienną losową o dystrybuancie

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{dla} \quad x \in [0, 1) \\ 1 & \text{dla} \quad x \geqslant 1 \end{cases} .$$

Znaleźć gęstości zmiennych losowych (a) $V = \frac{1}{2}X^2$, (b) $Y = |X - 0,25|$.

WSKAZÓWKA: $F_V(v) = P(V \leqslant v) = P(\frac{1}{2}X^2 \leqslant v) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad v < 0 \\ P(-\sqrt{2v} \leqslant X \leqslant \sqrt{2v}) & \text{dla} \quad v \geqslant 0 \end{cases} =$

$= \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad v < 0 \\ F(\sqrt{2v}) - F(-\sqrt{2v}) & \text{dla} \quad v \geqslant 0 \end{cases} = \ldots$, zaś $f_V(v) = F_V'(v)$ w punktach v, w których F_V jest różniczkowalna.

7. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(2, 5)$. Wyznaczyć (a) wartość oczekiwaną zmiennej losowej $Z = 2 + 11X - 5X^2$, (b) wartość przeciętną i odchylenie standardowe zmiennej losowej $U = 3X + 2$.

8. Wyprowadzić wzory na wartość oczekiwaną i wariancję dla zmiennych losowych o rozkładzie (a) geometrycznym $Ge(p)$, $p \in (0, 1)$, (b) wykładniczym $Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$.

WSKAZÓWKA do (a): $E(X^2) = E\left(X(X-1)\right) + EX$. Do liczenia pojawiających się tu nieskończonych sum przydaje się twierdzenie o różniczkowaniu szeregu potęgowego.

9. Zgodnie z planem czas lotu z Warszawy do Frankfurtu ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej 1,5 godziny i wariancji 4 min^2. (a) Oblicz prawdopodobieństwo, że pokonanie samolotem tej trasy zajmie: (a1) więcej niż 95 min, (a2) dokładnie 95 min, (a3) mniej niż 1 godzinę. (b) Wyznacz czas lotu, którego nie przekroczy 65% samolotów lecących z Warszawy do Frankfurtu.

10. Pewien spammer wysłał 150 emaili do losowo wybranych klientów pewnego banku z prośbą o pilne udostępnienie numerów kart kredytowych. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że osoba, która otrzymała taki list, wyśle przestępcy numer swojej karty wynosi $0,03$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że spammer otrzyma co najmniej 3 numery kart.

11. Wśród 10 monet dwie mają orły po obu stronach, pozostałe są rzetelne, symetryczne. Wybieramy losowo jedną monetę i rzucamy ją tak długo, dopóki nie wypadnie orzeł. Znaleźć rozkład liczby wykonanych rzutów i wyznaczyć jej wartość przeciętną i odchylenie standardowe.

WSKAZÓWKA: Warto spojrzeć na wskazówkę do zadania 8.