3. Wektory losowe

1. Dwuwymiarowa zmienna losowa ma rozkład dany tabelką:

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	$0,1$	A	$0,2$
1	$0,2$	$0,2$	$2A$

.

(a) Wyznaczyć stałą A. (b) Podać rozkłady brzegowe X i Y. (c) Sprawdzić czy X i Y są niezależne. (d) Wyznaczyć kowariancję X i Y. (e) Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = |X - Y|$ oraz wartość oczekiwaną Z.

2. Wektor losowy (X, Y) ma rozkład dyskretny $P(X = i, Y = j) = p^2(1-p)^j, \quad 0 \leqslant i \leqslant j$, gdzie $p \in (0, 1)$. Znaleźć rozkłady brzegowe zmiennych losowych X i Y oraz rozkład różnicy $W = Y - X$.

3. Zmienna losowa dwuwymiarowa (X, Y) ma rozkład ciągły o gęstości:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{A}{x^3} & , \ 1 < y < x, \\ 0 & \text{dla pozostałych } (x,y). \end{cases}$$

Wyznaczyć stałą A, gęstości brzegowe $f_X(x)$, $f_Y(y)$ oraz dystrybuantę $F(2, 3)$.

4. Wektor losowy (X, Y) ma rozkład jednostajny na zbiorze $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1 \quad \text{i} \quad x \geqslant 0\}$. Znaleźć $Cov(X, Y)$.

WSKAZÓWKA: Wektor losowy $(X_1, \ldots, X_d)$ ma rozkład jednostajny na zbiorze $D \subset \mathbb{R}^d$, gdy

$$f(x_1, \ldots, x_d) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad (x_1, \ldots, x_d) \notin D, \\ 1/\text{miara}(D) & \text{dla} \quad (x_1, \ldots, x_d) \in D, \end{cases}$$

gdzie przez miara(D) rozumiemy pole D, gdy $D \subset \mathbb{R}^2$, objętość D, gdy $D \subset \mathbb{R}^3$ itd.

5. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma gęstość:

$$f(x,y) = \begin{cases} y & \text{dla } x \in [0,2] \text{ i } y \in [0,1], \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

(a) Znaleźć gęstości brzegowe $f_X(x)$ oraz $f_Y(y)$. (b) Sprawdzić czy X i Y są niezależne. (c) Podać współczynnik korelacji X i Y.

6. Wektor losowy (X, Y) ma gęstość

$$f(x,y) = \begin{cases} |x| & \text{jeśli } \ -1 < x < y < 1, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Znaleźć rozkład zmiennej losowej $Z = X + Y$.

7. Niech $X_1, X_2, \ldots X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0, 1)$. Wyznaczyć gęstości zmiennych losowych (a) $Y = \max\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$, (b) $Z = \min\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$.

8. Pewien domokrążca trudni się sprzedażą „renomowanych” patelni i dywanów. Niech X oznacza liczbę dywanów, natomiast Y liczbę patelni, jaką udaje się owemu domokrążcy sprzedać w ciągu jednego dnia. Rozkład prawdopodobieństwa wektora losowego (X, Y) jest następujący:

$Y \setminus X$	0	1	2
1	0,3	0,2	0,1
2	0,1	0,2	0,1

.

Obliczyć wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe dziennego utargu domokrążcy, jeżeli dywany sprzedaje on za 100 zł, natomiast patelnie za 15 zł.

9. Zmienne losowe X_1, X_2, X_3, X_4 są niezależne oraz $EX_i = i$ dla $i = 1, 2, 3, 4$. Znaleźć $E(X_1 + X_1X_2 + X_1X_2X_3 + X_1X_2X_3X_4)$.

10. Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_{50}$ są niezależne i mają ten sam rozkład jednostajny na zbiorze $\{1, 2, \ldots, N\}$, tzn. $\forall_{i=1,\ldots,50}\ P(X_i = j) = \frac{1}{N}$ dla $j = 1, \ldots, N$. Znaleźć współczynnik korelacji $\rho(U, V)$ zmiennych losowych $U = \sum_{i=1}^{50} X_i$, $V = X_1 + 2X_2$.

UWAGA: Informacja o tym, że $X_1, \ldots, X_{50}$ mają rozkład jednostajny na zbiorze $\{1, 2, \ldots, N\}$ jest zbędna. Ten sam wynik otrzymamy przy słabszym założeniu, że $X_1, \ldots, X_{50}$ mają ten sam rozkład o niezerowej i skończonej wariancji. Zatem szkoda tracić czasu na liczenie EX_1 oraz $Var(X_1)$.