4. Rodzaje zbieżności ciągów zmiennych losowych. Twierdzenia graniczne

Warto pamiętać, że

- $\Gamma(p) := \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$, $p > 0$;
- $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ dla $p > 0 \implies \Gamma(n) = (n-1)!$ dla $n \in \mathbb{N}$.

1. Zmienna losowa X ma rozkład normalny $N(2, 7)$. Stosując nierówność Czebyszewa oszacować z góry prawdopodobieństwo $P(|X - 2| > 10)$.

2. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^k}{k!}e^{-x} & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x \leqslant 0, \end{cases}$$

gdzie $k \in \mathbb{N}$. Korzystając z nierówności Czebyszewa udowodnić nierówność

$$P\left(X < 2(k+1)\right) \geqslant \frac{k}{k+1}.$$

3. Mówimy, że ciąg zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$ spełnia *słabe prawo wielkich liczb* (SPWL) jeśli

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{P} 0,$$

gdzie $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Udowodnić, że jeśli ciąg zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$ jest taki, że $\lim_{n\to\infty} \frac{Var(S_n)}{n^2} = 0$, to spełnia on SPWL.

4. Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda = 2$. Wykazać, że ciąg $\frac{1}{n}(X_1X_2 + X_3X_4 + X_5X_6 + \ldots + X_{2n-1}X_{2n})$ jest zbieżny według prawdopodobieństwa i znaleźć jego granicę.

5. Pewien spammer wysłał 150 emaili do losowo wybranych klientów pewnego banku z prośbą o pilne udostępnienie numerów kart kredytowych. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że osoba, która otrzymała taki list, wyśle przestępcy numer swojej karty wynosi $0,03$. Używając twierdzenia Poissona oszacować prawdopodobieństwo, że spammer otrzyma co najmniej 3 numery kart i otrzymany wynik porównać z wynikiem z zadania 2.10.

6. W wyniku kradzieży majonezów w supermarkecie firma traci dziennie średnio 205 zł z wariancją 900 zł^2. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kwartalna (92 dni) strata spowodowana kradzieżą majonezów wyniesie więcej niż 10 000 zł ale mniej niż 18 000 zł?

7. W przyszłym tygodniu w Centrum Banacha odbędzie się seminarium naukowe, na które zaproszono 120 osób. Szacuje się, że prawdopodobieństwo tego, iż zaproszona osoba przybędzie na seminarium, wynosi 0,8. Jaka jest najmniejsza liczba filiżanek, które musi przygotować sekretarka, aby z prawdopodobieństwem 0,95 każdy z uczestników seminarium mógł się napić herbaty albo kawy?