5. Metody wyznaczania estymatorów. Własności estymatorów

1. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z przesuniętego rozkładu wykładniczego o gęstości

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} ae^{-a(x-b)} & \text{dla} \quad x \geqslant b \\ 0 & \text{dla} \quad x < b \end{cases}, \text{ gdzie } a > 0 \text{ i } b \in \mathbb{R}.$$

Metodą momentów wyznaczyć estymatory parametrów a i b.

2. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu Cauchy'ego o gęstości

$$f_a(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+(x-a)^2}, \; x \in \mathbb{R}, \; \text{gdzie } a \in \mathbb{R}.$$

Stosując metodę kwantyli i rozważając medianę, wyznaczyć estymator parametru a.

3. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie prostą próbą losową z rozkładu dwumianowego $binom(m, \theta)$, gdzie $m \in \mathbb{N}$ jest znane zaś $\theta \in (0,1)$ to nieznany parametr. Wyznaczyć estymator θ stosując
(a) metodę momentów;
(b) metodę największej wiarygodności.

4. Na podstawie prostej próby losowej $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z populacji X o rozkładzie dwumianowym $binom(m, \theta)$, gdzie $m \in \mathbb{N}$ jest znane zaś $\theta \in (0,1)$ to nieznany parametr, wyznaczyć metodą największej wiarygodności estymatory (a) EX, (b) $Var(X)$, (c) $P(X = 0)$. Wykorzystać wynik z poprzedniego zadania.

5. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, gdzie μ i σ^2 są nieznane. Metodą największej wiarygodności wyznaczyć estymatory (a) parametru $g(\mu, \sigma^2) = \frac{\mu^2}{\sigma^2}$, (b) kwantyla rzędu p, gdzie $p \in (0,1)$. Wykorzystać wynik z przykładu 6.4 z wykładu 6.

6. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ to prosta próba losowa z populacji X o rozkładzie z gęstością

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 0 \\ \frac{x}{\theta} \exp\left(-\frac{1}{2\theta} x^2\right) & \text{dla } x > 0 \end{cases},$$

gdzie $\theta > 0$ to nieznany parametr.
(a) Stosując metodę momentów i rozważając EX^2 wyznaczyć estymator parametru θ.
(b) Wyznaczyć estymator parametru θ metodą największej wiarygodności. Czy otrzymany estymator jest nieobciążony? Czy jest mocno zgodny?

7. Cecha X ma rozkład prawdopodobieństwa o gęstości $f_\theta(x)$ postaci

$$f_\theta(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & \text{dla} \quad x \geqslant \theta \\ 0 & \text{dla} \quad x < \theta \end{cases}, \text{ gdzie } \theta \in \mathbb{R},$$

Na podstawie próby losowej $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z X, znaleźć estymator parametru θ metodą największej wiarygodności. Następnie dla wyznaczonego estymatora obliczyć jego obciążenie i błąd średniokwadratowy oraz odpowiedzieć na pytanie czy jest on nieobciążony, asymptotycznie nieobciążony, słabo zgodny.

8. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu $Gamma(\alpha, \beta)$, gdzie parametr kształtu α jest znany, zaś parametr β jest nieznany. Pokazać, że, gdy $n\alpha > 1$, to $T_n = \frac{n\alpha - 1}{n\bar{X}}$ jest nieobciążonym i mocno zgodnym estymatorem parametru β.

WSKAZÓWKA: Podczas sprawdzania nieobciążoności trzeba wyznaczyć rozkład sumy $\sum_{i=1}^n X_i$. Do tego przydaje się fakt o sumowaniu niezależnych zmiennych losowych o rozkładach gamma, podany pod koniec wykładu 3 i 4.
Ponadto przydaje się znajomość własności funkcji $\Gamma(p)$.