1. Prawdopodobieństwo

1. Dane są: $P(A') = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ i $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Obliczyć $P(B')$, $P(A \cap B')$ i $P(B \setminus A)$.

2. Grupa studencka, składająca się z 14 studentów i 6 studentek, została podzielona losowo na cztery pięcioosobowe zespoły. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że (a) zespół pierwszy i trzeci są męskie, (b) dokładnie jeden zespół jest żeński (c) dwie studentki, Ewa i Kasia są w tym samym zespole, (d) trzeci zespół jest żeński.

3. Z grupy m piłkarzy tworzone są losowo dwa n-osobowe zespoły do gry kontrolnej, $m \geqslant 2n$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dwaj najlepsi zawodnicy A, B (a) zagrają przeciwko sobie, (b) będą w tym samym zespole, (c) nie zagrają w grze kontrolnej.

4. Na odcinek jednostkowy rzucamy losowo dwa punkty dzielące go na trzy części. Obliczyć prawdopodobieństwo, że środkowa część będzie krótsza niż lewa i dłuższa niż prawa.

5. Na podstawę trójkąta rzucono losowo dwa punkty, łącząc je z przeciwległym wierzchołkiem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z trzech utworzonych w ten sposób trójkątów ten przylepiony do prawego boku ma największe pole, ale mniejsze od sumy pól pozostałych dwóch trójkątów?

6. Obliczyć prawdopodobieństwo, że suma dwóch losowo wybranych, dodatnich ułamków mniejszych niż 1, jest mniejsza od 1, a wartość bezwzględna różnicy tych ułamków jest mniejsza od $\frac{1}{2}$.

7. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że pierwiastki równania $x^2 + 2ax + b = 0$ są
(a) rzeczywiste, (b) rzeczywiste dodatnie,
jeśli (a, b) jest losowo wybranym punktem prostokąta $\{(a, b) : |a| < 2,\ |b| < 1\}$.

8. Rzucamy symetryczną kostką do gry do chwili otrzymania piątki lub szóstki. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wykonamy (a) co najwyżej k rzutów ($k = 1, 2, \ldots$), (b) nieparzystą liczbę rzutów.

9. Rzucamy symetryczną kostką do gry do chwili, gdy po raz 5-ty wyrzucimy liczbę oczek podzielną przez 3. Obliczyć prawdopodobieństwo, że liczbę oczek niepodzielną przez 3 otrzymamy (a) dokładnie k razy ($k = 0, 1, \ldots$), (b) mniej niż dwa razy.

10. Rzucamy symetryczną monetą do chwili, gdy wyrzucimy orła lub przeprowadzimy k doświadczeń, $k \geqslant 3$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że moneta została rzucona k razy, jeśli wiadomo, że przy pierwszych dwóch doświadczeniach wypadła reszka.

11. Obie strony jednego z trzech żetonów są białe, drugiego - czarne, a trzeci żeton ma jedną białą i jedną czarną stronę. Wybieramy losowo jeden żeton i rzucamy na stół. Wierzchnia strona żetonu po upadnięciu na stół jest biała. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że jego spodnia strona też jest biała?

12. Mamy 13 urn: $U_1, \ldots U_{13}$, przy czym U_i zawiera i białych oraz $13 - i$ czarnych kul, $i = 1, \ldots 13$. Wybieramy jedną z tych urn, prawdopodobieństwo wybrania każdej z nich jest proporcjonalne do liczby znajdujących się w niej białych kul. Z wybranej urny losujemy dwie kule, które okazują się różnych kolorów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że te dwie kule pochodziły z j-tej urny?

13. Urządzenie ma 4 podzespoły. Podzespoły te psują się niezależnie od siebie, z jednakowymi prawdopodobieństwami $0,2$. Jeśli popsuje się tylko jeden z nich, urządzenie zadziała z prawdopodobieństwem $0,4$, jeśli popsują się dwa – z prawdopodobieństwem $0,1$. Jeśli zepsują się co najmniej 3 podzespoły, urządzenie nie zadziała. Jaka jest szansa, że urządzenie zadziała?

14. Udowodnić, że jeśli zdarzenia A i B są niezależne, to niezależne są także zdarzenia (a) A i B', (a) A' i B, (c) A' i B'.
Warto pamiętać, że analogiczny fakt jest prawdziwy także dla większej liczby zdarzeń.

15. Zenek uwielbia konkursy organizowane przez stacje radiowe. Prawdopodobieństwo wylosowania koszulki w konkursie Radia RMF wynosi $0,1$, natomiast prawdopodobieństwo wylosowania koszulki w konkursie Radia Zet wynosi $0,2$. Zakładając, że oba konkursy są niezależne, obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania przez Zenka co najmniej jednej koszulki.

ODPOWIEDZI I WSKAZÓWKI:

1. $P(B') = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B') = \frac{5}{12}$, $P(B \setminus A) = 0$
WSKAZÓWKA: Wykazać, że jeśli $C \subset D$, to $P(D \setminus C) = P(D) - P(C)$ oraz zauważyć, że $P(B \setminus A) = P(B \setminus (A \cap B))$.

2. a) $\frac{14!10!}{4!20!} = \frac{7}{1292} \approx 0,0054$ (b) $\frac{24}{\binom{20}{5}} = \frac{1}{646} \approx 0,00155$ (c) $\frac{4\binom{18}{3}}{\binom{20}{5}} = \frac{4}{19} \approx 0,2$ (d) $\frac{6}{\binom{20}{5}} = \frac{1}{2584} \approx 0,00039$

3. (a) $\frac{2n^2}{m(m-1)}$ (b) $\frac{2n(n-1)}{m(m-1)}$ (c) $\frac{(m-2n)(m-2n-1)}{m(m-1)}$

4. $\frac{1}{6}$

5. $\frac{1}{12}$

6. $\frac{3}{8}$

7. (a) $\frac{5}{6}$ (b) $\frac{1}{6}$

8. (a) $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k$ (b) $\frac{3}{5}$

9. (a) $\binom{k+4}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^5$ (b) $\frac{13}{3^6} \approx 0,018$

10. $(\frac{1}{2})^{k-3}$

11. $\frac{2}{3}$

12. $\frac{j^2(13-j)}{\sum_{i=1}^{12}(13-i)i^2} = \frac{j^2(13-j)}{2366}$

13. $(0,8)^4 + 0,4 \cdot 4 \cdot 0,2 \cdot (0,8)^3 + 0,1 \cdot 6 \cdot (0,2)^2 \cdot (0,8)^2 = 0,5888$

15. $0,28$