2. Zmienne losowe

1. Niech X będzie zmienną losową opisującą pojemność butelki z wodą wybieraną przez klienta w hipermarkecie (w litrach). Rozkład tej zmiennej dany jest dystrybuantą

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 1 \\ 0,6 & \text{dla} \quad 1 \leqslant x < 1,5 \\ 0,9 & \text{dla} \quad 1,5 \leqslant x < 5 \\ 1 & \text{dla} \quad x \geqslant 5 \end{cases}.$$

Obliczyć wartość średnią i odchylenie standardowe pojemności butelki z wodą wybieranej przez klientów oraz prawdopodobieństwo wybrania butelki o pojemności nie przekraczającej 2 litrów.

2. W urnie znajduje się 5 kul białych i 3 czarne. Wyciągamy losowo jedną kulę i zwracamy ją dokładając 4 kule koloru wylosowanego. Za drugim razem ciągniemy dwie kule. Niech X będzie zmienną losową przyjmującą wartości równe liczbie kul białych wśród wylosowanych za drugim razem. Podać rozkład zmiennej losowej X. Wyznaczyć dystrybuantę X oraz wartość przeciętną i wariancję X.

3. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \\ 1 + ae^{bx} & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

jest (a) dystrybuantą, (b) dystrybuantą typu ciągłego?

4. Dla jakiego A funkcja $f(x) = \frac{2A}{e^x + e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$ jest funkcją gęstości? Znaleźć dystrybuantę miary, której gęstość to $f(x)$.

5. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{C}{x^4} & , \quad |x| \geqslant 2 \\ 0 & , \quad |x| < 2 \end{cases}$$

Wyznaczyć C, dystrybuantę, wartość przeciętną i wariancję zmiennej losowej X. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że $|X| > 3$.

6. Obliczyć wartość średnią i odchylenie standardowe czasu oczekiwania na tramwaj, jeśli dystrybuanta rozkładu czasu oczekiwania dana jest wzorem (w min):

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \\ \frac{x}{5} & \text{dla} \quad 0 \leqslant x < 5 \\ 1 & \text{dla} \quad x \geqslant 5 \end{cases}.$$

7. Zmienna losowa X ma gęstość

$$f(x) = \begin{cases} Cx^{-2} & , \quad x > 1 \\ 0 & , \quad x \leqslant 1 \end{cases}$$

Wyznaczyć stałą C. Wyprowadzić wzory na gęstości zmiennych losowych (a) $Y = X^2 - 4X + 4$, (b) $Z = |X - 3|$, (c) $W = X^2 - 3X$.

8. Podać i udowodnić ogólny wzór wyrażający gęstość zmiennej losowej $Y = 1 - 2X$ w terminach gęstości X.

9. $P(X=-1)=P(X=1)=\frac{1}{4}$, $P(X=0)=\frac{1}{2}$. Ile wynoszą: (a) EX oraz σ_X, (b) $Var(X^2)$, (c) EX^k dla dowolnego k naturalnego?

10. $P(X=-1)=P(X=1)=\frac{1}{8}$, $P(X=0)=\frac{1}{2}$, $P(X=2)=p$. Znaleźć $Var(Y)$ dla $Y=2X-1$.

11. Pojemność wyprodukowanej partii kondensatorów jest zmienną losową o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną 500 pF i wariancją 625 pF^2. Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrany z tej partii kondensator ma pojemność większą od 525 pF i mniejszą od 700 pF.

12. Stwierdzono, że natężenie prądu w badanym obwodzie ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej 10 mA i odchyleniu standardowym 2 mA. Wyznaczyć wartość natężenia, które nie jest przekraczane z prawdopodobieństwem 0,98.

13. Wyprowadzić wzory na wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej o rozkładzie Poissona $Pois(\lambda)$, $\lambda>0$.

14. Liczba cząstek emitowanych przez pewną substancję promieniotwórczą w ciągu 10 sekund jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną 3. Obliczyć prawdopodobieństwo wyemitowania w tym czasie więcej niż jednej cząstki.

15. Na stu mężczyzn pięciu nie rozróżnia kolorów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w losowej grupie 8 mężczyzn znajdzie się co najwyżej jeden daltonista?

16. Wśród 10 monet dwie mają orły po obu stronach, pozostałe są rzetelne, symetryczne. Wybieramy losowo jedną monetę i rzucamy ją tak długo, dopóki orzeł nie wypadnie 2 razy. Znaleźć rozkład liczby wykonanych rzutów i jej wartość średnią.

ODPOWIEDZI:

1. $EX=1,55$, $\sigma=\sqrt{1,3725}\approx 1,171$, $P(X\leqslant 2)=0,9$

2.

x_k	0	1	2
p_k	13/88	40/88	35/88

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad x<0\\ 13/88 & \text{dla} \quad 0\leqslant x<1\\ 53/88 & \text{dla} \quad 1\leqslant x<2\\ 1 & \text{dla} \quad x\geqslant 2\end{cases}, \quad EX=\frac{5}{4},\ Var(X)=\frac{85}{176},$$

$(EX^2=\frac{45}{22})$

3. (a) $a\in[-1,0)$ i $b<0$ lub $a=0$ i $b\in\mathbb{R}$ (b) $a=-1$ i $b<0$

4. $A=\frac{1}{\pi}$, $F(x)=\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}e^x$ dla $x\in\mathbb{R}$

5. $$C=12,\ F(t)=\begin{cases}-\frac{4}{t^3} & \text{dla} \quad t\leqslant -2\\ \frac{1}{2} & \text{dla} \quad t\in(-2,2)\\ 1-\frac{4}{t^3} & \text{dla} \quad t\geqslant 2\end{cases},\ EX=0,\ Var(X)=12,\ P(|X|>3)=\frac{8}{27}$$

6. $EX=2,5$, $\sigma\approx$1,443375

7. $$C=1,\ f_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad y\leqslant 0\\ \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{1}{(2-\sqrt{y})^2}+\frac{1}{(2+\sqrt{y})^2}\right) & \text{dla} \quad y\in(0,1)\\ \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{1}{(2+\sqrt{y})^2} & \text{dla} \quad y\geqslant 1\end{cases},$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad z\leqslant 0\\ \frac{1}{(3-z)^2}+\frac{1}{(3+z)^2} & \text{dla} \quad z\in(0,2)\\ \frac{1}{(3+z)^2} & \text{dla} \quad z\geqslant 2\end{cases},$$

$$f_W(w) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad w \leqslant -9/4 \\ \frac{1}{2\sqrt{w+9/4}}\left(\frac{1}{\left(3/2-\sqrt{w+9/4}\right)^2} + \frac{1}{\left(3/2+\sqrt{w+9/4}\right)^2}\right) & \text{dla} \quad w \in (-9/4, -2) \\ \frac{1}{2\sqrt{w+9/4}}\frac{1}{\left(3/2+\sqrt{w+9/4}\right)^2} & \text{dla} \quad w \geqslant -2 \end{cases}$$

8. $f_Y(y) = \frac{1}{2} f_X(\frac{y-1}{-2})$ dla $y \in \mathbb{R}$

9. (a) $EX = 0$, $\sigma_X = \frac{\sqrt{2}}{2}$, (b) $\frac{1}{4}$, (c) $EX^k = \begin{cases} 0 & \text{dla nieparzystych } k \\ \frac{1}{2} & \text{dla parzystych } k \end{cases}$

10. 4 ($p = \frac{1}{4}$)

11. $\Phi(8) - \Phi(1) \approx 1 - 0,841345 = 0,158655$

12. $\Phi(\frac{a-10}{2}) = 0,98 \Rightarrow a \approx 14,1075$

14. $1 - 4e^{-3} \approx 0,800851726$

15. $(0,95)^8 + 8 \cdot 0,05 \cdot (0,95)^7 \approx 0,942755$

16. $P(X = k) = \begin{cases} \frac{2}{5} & \text{gdy} \quad k = 2 \\ \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^k (k-1) & \text{gdy} \quad k = 3, 4, \ldots \end{cases}$, $EX = \frac{18}{5}$, gdzie X to liczba wykonanych rzutów