3. Wektory losowe

1. Dwuwymiarowa zmienna losowa ma rozkład dany tabelką:

$Y \backslash X$	-1	1
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

.

Sprawdzić niezależność zmiennych losowych X i Y. Podać współczynnik korelacji X i Y.

2. Zmienne losowe X i Y są niezależne oraz $P(X = k) = P(Y = k) = p(1-p)^k$ dla $k = 0, 1, \ldots$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = X + Y$.

3. Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa wektora losowego (X, Y) jest dana wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} c & \text{dla} \quad |x+y| \leqslant 1, \quad |x-y| \leqslant 1, \quad xy > 0 \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych} \ \ x \ \text{ i } \ y \end{cases}$$

przy czym c jest pewną stałą rzeczywistą.
(a) Wyznaczyć stałą c.
(b) Wyznaczyć gęstości rozkładów brzegowych zmiennych losowych X i Y.
(c) Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej losowej $Z = X + Y$.
(d) Wyznaczyć współczynnik kowariancji zmiennych losowych X i Y.

4. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \ -1 < y < x < 1, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wyznaczyć gęstości brzegowe $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $E(XY)$ oraz $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$.

5. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma gęstość

$$f(x,y) = \begin{cases} Cx & , \ (x,y) \in D, \\ 0 & , \ (x,y) \notin D, \end{cases}$$

gdzie $D = \{(x,y) : 0 < x < y < 1\}$. Wyznaczyć stałą C, gęstości brzegowe X i Y, dystrybuantę $F(2, 1/2)$ oraz rozkład zmiennej losowej $Z = X + Y$. Sprawdzić czy X i Y są niezależne.

6. Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają gęstości:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x \leqslant 0 \end{cases}, \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 2y & , \ y \in (0,1) \\ 0 & , \ y \notin (0,1) \end{cases}.$$

Znaleźć gęstość zmiennej losowej $Z = X + Y$.

7. Niech $X_1, X_2, \ldots X_5$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym $Exp(1)$. Znaleźć $E(\min\{X_1, X_2, \ldots X_5\})$.

8. Firma ubezpieczeniowa wypłaca agentom zajmującym się ubezpieczeniami komunikacyjnymi pensję w wysokości 600 zł miesięcznie, a ponadto 10 zł za każdą zawartą umowę OC i 20 zł za każdą zawartą umowę AC. Pewien agent zawiera w miesiącu średnio 60 umów OC i 40 umów AC z odchyleniami standardowymi, odpowiednio, 15 i 10. Współczynnik korelacji pomiędzy liczbą zawieranych umów OC i AC wynosi $0,7$. Obliczyć średni miesięczny dochód tego agenta oraz odchylenie standardowe jego miesięcznego dochodu.

9. Wiedząc, że $EX = EY = 0$, $EX^2 = EY^2 = 1$, $\rho(X,Y) = \frac{1}{2}$ wyznaczyć $Cov(U,V)$, gdzie $U = X + Y$, $V = X - 2Y$.

10. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają ten sam rozkład $\mathcal{N}(1,1)$. Znaleźć $\rho(U,X)$, gdzie $U = X - 2Y$.

ODPOWIEDZI:

1. są niezależne $\Rightarrow \rho = 0$

2. $P(Z = k) = (k+1)p^2(1-p)^k$, $k = 0, 1, \dots$

3. (a) $c = 1$ (b) $f_X(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \notin (-1,1) \\ 1+x & , \ x \in (-1,0] \\ 1-x & , \ x \in (0,1) \end{cases} = f_Y(x)$ (c) $f_Z(z) = \begin{cases} 0 & , \ z \notin (-1,1) \\ |z| & , \ z \in (-1,1) \end{cases}$

(d) $Cov(X,Y) = \frac{1}{12}$

4. $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+x) & , \quad x \in (-1,1) \\ 0 & , \quad x \notin (-1,1) \end{cases}$, $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-y) & , \quad y \in (-1,1) \\ 0 & , \quad y \notin (-1,1) \end{cases}$,

$E(XY) = 0$, $P(X > \frac{1}{2}) = \frac{7}{16}$

5. $C = 6$, $f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & , \quad x \in (0,1) \\ 0 & , \quad x \notin (0,1) \end{cases}$, $f_Y(y) = \begin{cases} 3y^2 & , \quad y \in (0,1) \\ 0 & , \quad y \notin (0,1) \end{cases}$,

$F(2, \frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$, $f_Z(z) = \begin{cases} 0 & , \quad z \notin (0,2) \\ \frac{3}{4}z^2 & , \quad z \in (0,1) \\ -\frac{9}{4}z^2 + 6z - 3 & , \quad z \in [1,2) \end{cases}$, zależne

6. $f_Z(z) = \begin{cases} 0 & , \ z < 0 \\ 2(z + e^{-z} - 1) & , \ 0 \leqslant z < 1 \\ 2e^{-z} & , \ z \geqslant 1 \end{cases}$

7. $Z = \min\{X_1, X_2, \dots, X_5\} \sim Exp(5) \Longrightarrow EZ = \frac{1}{5}$

8. $EZ = 2000$, $\sigma_Z = \sqrt{104500} \approx 323,26$

9. $-1,5$

10. $\frac{1}{\sqrt{5}}$