4. Rodzaje zbieżności ciągów zmiennych losowych. Twierdzenia graniczne

1. Udowodnić *regułę trzech sigm*:

Jeśli $\sigma^2 = Var(X)$ jest skończona, to $P(|X - EX| \geqslant 3\sigma) \leqslant \frac{1}{9}$.

2. Korzystając z nierówności Czebyszewa oszacować z dołu prawdopodobieństwo $P(|X - \frac{1}{2}| < \frac{1}{3})$ dla zmiennej losowej X o rozkładzie jednostajnym $U(0,1)$. Wartość oczekiwaną i wariancję X wyznaczyć samemu (nie korzystać z gotowych wzorów na EX i $Var(X)$ gdy $X \sim U(a,b)$).

3. Korzystając bezpośrednio z nierówności Czebyszewa udowodnić następujące słabe prawo wielkich liczb:

Jeśli $X_1, X_2, \ldots$ to ciąg niezależnych zmiennych losowych o wspólnie ograniczonych wariancjach (tzn. $\exists \sigma^2 \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ Var(X_n) \leqslant \sigma^2$) i $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, to $\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{P} 0$.

Następnie wywnioskować stąd, że jeśli $X_1, X_2, \ldots$ to ciąg niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z wartością oczekiwaną μ i skończoną wariancją, to $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$.

4. Niech $(X_n, n \geqslant 1)$ będzie ciągiem zmiennych losowych takim, że $P(X_n = -n-4) = \frac{1}{n+4}$, $P(X_n = -1) = 1 - \frac{4}{n+4}$, $P(X_n = n+4) = \frac{3}{n+4}$. Pokazać, że (X_n) jest zbieżny według prawdopodobieństwa, ale $E(\lim_{n\to\infty} X_n) \neq \lim_{n\to\infty} E(X_n)$, gdzie $\lim_{n\to\infty} X_n$ oznacza granicę według prawdopodobieństwa.

5. Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$ o jednakowym rozkładzie jednostajnym na przedziale $[1,2]$. Udowodnić, że ciąg $\frac{1}{n}\left(\frac{X_1}{X_2} + \frac{X_3}{X_4} + \ldots + \frac{X_{2n-1}}{X_{2n}}\right)$ jest zbieżny prawie na pewno i znaleźć jego granicę.

6. W czasie szczytu liczba rozmów łączona przez pewną centralę w ciągu godziny ma rozkład Poissona ze średnią 40. Zakładając niezależność liczby rozmów w różnych godzinach oszacować prawdopodobieństwo, że centrala połączy w ciągu 1000 godzin szczytu między 38 a 40 tysięcy rozmów.

7. Prawdopodobieństwo tego, że osoba spotkana podczas igrzysk okaże się Polakiem wynosi 0,01. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w pięciotysięcznej grupie kibiców zgromadzonych w hali spotowej znajdzie się więcej niż 60 Polaków?

8. Gęstść rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej X jest dana wzorem

$$f(x) = c \cdot e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie c jest pewną stałą rzeczywistą.
(a) Ile wynosi c?
(b) Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X.
(c) Niech $X_1, \ldots, .X_{200}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa co rozkład zmiennej losowej X. Korzystając z Centralnego Twierdzenia Granicznego oszacować prawdopodobieństwo

$$P\left(\sum_{i=1}^{200} X_i < 30\right).$$

9. Eksperyment losowy polega na rzucie pudełkiem zapałek o wymiarach $1 \times 2 \times 3$, przy czym prawdopodobieństwo upadku na każdą ze ścianek jest proporcjonalne do jej powierzchni. Każda ścianka jest punktowana, odpowiednio, 0, 1 i 4 (od największej do najmniejszej.
(a) Powyższy eksperyment jest powtarzany 264 razy. Podać przybliżoną wartość prawdopodobieństwa, że łączna suma punktów przekroczy 258.
(b) Ile co najmniej rzutów należy wykonać, aby twierdzić z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż 0,9, że suma punktów przekroczy 0,9 liczby rzutów?

ODPOWIEDZI I WSKAZÓWKI:

1. WSKAZÓWKA: Wykorzystać nierówność Czebyszewa.

2. $P(|X - \frac{1}{2}| < \frac{1}{3}) \geqslant \frac{1}{4}$

4. $X_n \xrightarrow{P} -1$ a $\lim_{n\to\infty} E(X_n) = 1$.

5. Z mocnego prawa wielkich liczb Kołmogorowa otrzymujemy

$$\frac{1}{n}\left(\frac{X_1}{X_2} + \frac{X_3}{X_4} + \ldots + \frac{X_{2n-1}}{X_{2n}}\right) \xrightarrow{1} E\left(\frac{X_1}{X_2}\right) = E(X_1)E\left(\frac{1}{X_2}\right) = \frac{3}{2}\ln 2,$$

gdzie przedostatnia równość wynika z niezależności X_1 i $1/X_2$.

6. $\Phi(0) - \Phi(-10) \approx 0,5$

7. $1 - \Phi(1,42) \approx 0,078$

8. (a) $c = \frac{1}{2}$ (b) $EX = 0$, $Var(X) = 2$ (c) $\Phi(1,5) \approx 0,9332$

9. (a) $\Phi(0,25) \approx 0,5987$ (b) $\Phi\left(\frac{0,1\sqrt{11}}{2\sqrt{6}}\sqrt{n}\right) \geqslant 0,9 \Rightarrow$ co najmniej 358 rzutów