5. Metody wyznaczania estymatorów. Własności estymatorów

1. Stosując metodę momentów, wyznaczyć estymator parametru θ na podstawie próby losowej $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z populacji X o rozkładzie trzypunktowym, takim że

$$P(X=-1)=\frac{\theta}{4},\ P(X=0)=1-\theta \text{ oraz } P(X=2)=\frac{3\theta}{4},\ \text{gdzie } \theta\in(0,1).$$

2. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu (a) Poissona $Pois(\lambda)$, (b) geometrycznego $Ge(\theta)$. Wyznaczyć estymatory parametrów λ i θ stosując (1) metodę momentów, (2) metodę największej wiarygodności.

3. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z populacji X o rozkładzie geometrycznym $Ge(\theta)$, $\theta \in (0,1)$. Stosując metodę największej wiarygodności wyznaczyć estymatory $P(X \leqslant 2)$ i $\bar{F}(x)$ dla $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

4. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie prostą próbą losową z rozkładu $Gamma(\alpha, \beta)$, gdzie $\alpha > 0$ i $\beta > 0$ to nieznane parametry. Stosując metodę momentów (odpowiednie momenty wyznaczyć samemu, bez korzystania z gotowych na nie wzorów) wyznaczyć estymatory parametrów α i β.

5. Metodą kwantyli wyznaczyć estymatory parametrów a i b na podstawie próby losowej $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z rozkładu Cauchy'ego o gęstości

$$f_{a,b}(x)=\frac{1}{b\pi}\frac{1}{1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2},\ x\in\mathbb{R},\ \text{gdzie } a\in\mathbb{R},\ b>0.$$

Zrobić to na dwa sposoby: rozważając dolny i górny kwartyl oraz rozważając medianę i dolny kwartyl.

6. Na podstawie próby losowej $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z rozkładu o gęstości

$$f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{2}{\theta^2}x & \text{dla} \quad x\in[0,\theta]\\ 0 & \text{dla} \quad x\notin[0,\theta]\end{cases},\ \text{gdzie } \theta>0,$$

wyznaczyć metodą największej wiarygodności estymator parametru θ. Czy otrzymany estymator jest nieobciążony? Czy jest asymptotycznie nieobciążony? Znaleźć błąd średniokwadratowy tego estymatora.

7. Cecha X ma rozkład o dystrybuancie

$$F_\theta(x)=\begin{cases}0 & \text{dla } x<3\\ 1-3^\theta x^{-\theta} & \text{dla } x\geqslant 3,\end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem.
(a) Wyznaczyć gęstość tego rozkładu.
(b) Na podstawie próby losowej $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z rozkładu X, zakładając dodatkowo, że $\theta > 1$, wyznaczyć estymator parametru θ metodą momentów.
(c) Na podstawie próby losowej $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z rozkładu X wyznaczyć estymator największej wiarygodności parametru θ.
(d) Wyznaczyć estymator największej wiarygodności parametru $\beta = \dfrac{1}{\theta}$.

8. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu $Gamma(\alpha, \beta)$, gdzie parametr kształtu α jest znany, zaś parametr β jest nieznany. Metodą największej wiarygodności wyznaczyć estymator parametru β. Czy wyznaczony estymator jest nieobciążony, asymptotycznie nieobciążony, mocno lub słabo zgodny? Ile wynosi (a) obciążenie tego estymatora (gdy $n\alpha > 1$), (b) błąd średniokwadratowy tego estymatora (gdy $n\alpha > 2$)?

ODPOWIEDZI I WSKAZÓWKI:

1. $EX = \frac{5\theta}{4} \implies \hat{\theta}_{MM} = \frac{4}{5}\bar{X}$

2. (a) $\hat{\lambda}_{MM} = \hat{\lambda}_{NW} = \bar{X}$ (b) $\hat{\theta}_{MM} = \hat{\theta}_{NW} = 1/(1+\bar{X})$

3. $\hat{P}(X \leqslant 2)_{NW} = 1 - \left(\frac{\bar{X}}{1+\bar{X}}\right)^3$, $\hat{\bar{F}}(x)_{NW} = \left(\frac{\bar{X}}{1+\bar{X}}\right)^{x+1}$
WSKAZÓWKA: Wykorzystać wynik z poprzedniego zadania.

4. $\hat{\alpha}_{MM} = \frac{M_1^2}{M_2 - M_1^2} = \frac{n(\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$, $\hat{\beta}_{MM} = \frac{M_1}{M_2 - M_1^2} = \frac{n\bar{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$

5. Pierwszy sposób: $\hat{a}_{MK} = \frac{1}{2}(q_{1/4} + q_{3/4})$, $\hat{b}_{MK} = \frac{1}{2}(q_{3/4} - q_{1/4}) = \frac{1}{2}IQR$; drugi sposób: $\hat{a}_{MK} = q_{1/2}$, $\hat{b}_{MK} = q_{1/2} - q_{1/4}$, gdzie $q_{1/2}$, $q_{1/4}$, $q_{3/4}$ oznaczają odpowiednio medianę próbkową oraz dolny i górny kwartyl próbkowy.

6. $\hat{\theta}_{NW} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, estymator ten nie jest nieobciążony, ale jest asymptotycznie nieobciążony ($E(\hat{\theta}_{NW}) = \frac{2n}{2n+1}\theta$), $MSE_{\hat{\theta}_{NW}}(\theta) = \frac{1}{(n+1)(2n+1)}\theta^2$

7.

(a) $f_\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 3 \\ \theta 3^\theta x^{-\theta-1} & \text{dla } x \geqslant 3 \end{cases}$ (b) $\hat{\theta} = \dfrac{\bar{X}}{\bar{X} - 3}$ (c) $\hat{\theta}_{NW} = \dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln X_i - \ln 3}$

(d) $\hat{\beta}_{NW} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln X_i - \ln 3$

8. $\hat{\beta}_{NW} = \alpha/\bar{X}$, estymator ten nie jest nieobciążony, ale jest asymptotycznie nieobciążony, jest mocno zgodny, zatem też słabo zgodny, $B_{\hat{\beta}_{NW}}(\beta) = \frac{1}{n\alpha - 1}\beta$, $MSE_{\hat{\beta}_{NW}}(\beta) = \frac{n\alpha + 2}{(n\alpha - 1)(n\alpha - 2)}\beta^2$