10. WERYFIKACJA HIPOTEZ

Definicja. *Hipotezą statystyczną* nazywamy przypuszczenie, dotyczące nieznanego rozkładu badanej cechy populacji, o prawdziwości lub fałszywości którego wnioskuje się na podstawie pobranej próby.

Przykład 10.1.

1. *Wysuwamy hipotezę, że badana cecha ma rozkład normalny.*
2. *Wiemy, że badana cecha ma rozkład normalny o nieznanej wartości średniej μ i znanym odchyleniu standardowym $\sigma = 1$. Wysuwamy hipotezę, że $\mu = 5$.*
3. *Dane są dwa zbiory obserwacji, np. wysokości plonów uzyskane podczas naważenia nawozem A i nawozem B.*
   (a) *Wysuwamy hipotezę, że oba zbiory można traktować jako pochodzące z populacji o tym samym rozkładzie.*
   (b) *Z wcześniejszych badań wiemy, że zbiory te można traktować jako pochodzące z populacji o rozkładach normalnych odpowiednio $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, gdzie parametry μ_1, μ_2, σ_1 i σ_2 są nieznane, ale takie, że $\sigma_1 = \sigma_2$. Wysuwamy przypuszczenie, że średnia wartość plonów przy nawożeniu nawozem A jest większa niż średnia wartość plonów przy nawożeniu nawozem B (tzn. że $\mu_1 > \mu_2$).*

Definicja. Hipotezy, które dotyczą wyłącznie wartości parametru lub parametrów rozkładu badanej cechy nazywamy *hipotezami parametrycznymi.* Hipotezy, które nie są hipotezami parametrycznymi nazywamy *hipotezami nieparametrycznymi.*

W przykładzie 10.1 hipotezy 2 i 3(b) są parametryczne, natomiast hipotezy 1 i 3(a) są nieparametryczne.

Definicja. *Hipotezą prostą* nazywamy hipotezę, która jednoznacznie określa rozkład badanej cechy. *Hipotezą złożoną* nazywamy hipotezę, która określa całą grupę rozkładów.

Hipoteza 2 z przykładu 10.1 jest hipotezą prostą. Pozostałe hipotezy w tym przykładzie są złożone.

W praktyce rozważamy dwie hipotezy: *hipotezę zerową* (będziemy ją oznaczać H_0) i *hipotezę alternatywną* (tą będziemy oznaczać H_1). Jeśli odrzucamy hipotezę zerową, to przyjmujemy hipotezę alternatywną i na odwrót.

Przykład 10. 2. *Wiemy, że wysokość plonów przy nawożeniu starą metodą ma rozkład normalny o wartości średniej* 5 *i wariancji* 1*:* $\mathcal{N}(5,1)$ *i że wysokość plonów przy nawożeniu nową metodą ma rozkład normalny o tej samej wariancji* $\sigma^2 = 1$ *ale o nieznanej wartości średniej* μ*:* $\mathcal{N}(\mu,1)$*. Chcemy sprawdzić czy nowa metoda zwiększyła średnią wysokość plonów.*

W tym celu będziemy testować $H_0 : \mu = 5$ *przeciwko* $H_1 : \mu > 5$.

Przeprowadzamy eksperyment losowy. Wynik takiego eksperymentu to próba czyli wektor losowy $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ o wartościach w $\mathbb{R}^n$.

Definicja. *Statystyką testową* nazywamy funkcję próby $\delta(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, która służy do weryfikacji H_0 przeciwko H_1. Zbiór wszystkich możliwych wartości funkcji δ dzielimy na dwa rozłączne zbiory W i W' takie, że:

- jeśli $\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W$, to H_0 odrzucamy,
- jeśli $\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W'$, to H_0 przyjmujemy.

W nazywamy *zbiorem krytycznym testu* (zbiorem odrzuceń H_0).

Musimy dobrze skonstruować statystykę testową i rozsądnie dobrać zbiór krytyczny, tak by podejmować decyzje zgodne z rzeczywistością. Jednak, ponieważ decyzje podejmujemy jedynie na podstawie próby, nie mamy całkowitej informacji o badanej populacji i w związku z tym zawsze jesteśmy narażeni na popełnienie błędu - podjęcie decyzji niezgodnej z rzeczywistością. Dokładniej, możemy popełnić jeden z dwóch błędów:

1. odrzucić H_0 w sytuacji, gdy jest ona prawdziwa (tzw. *błąd pierwszego rodzaju*);
2. przyjąć H_0 w sytuacji, gdy jest ona fałszywa (tzw. *błąd drugiego rodzaju*).

Definicja. *Poziom istotności testu*, oznaczany α, gdzie $\alpha \in (0,1)$, to kres górny wszystkich możliwych wartości prawdopodobieństwa błędu I-go rodzaju. Dokładniej, jeśli $H_0 : \theta \in \Theta_0$, to

$$\begin{aligned}\alpha &= \sup_{\theta\in\Theta_0} P(\text{ test odrzuci } H_0, \text{ gdy testowany parametr ma wartość } \theta) \\ &\overset{ozn.}{=} \sup_{\theta\in\Theta_0} P(\text{ test odrzuci } H_0|\theta).\end{aligned}$$

Zwyczajowo przyjmuje się $\alpha = 0,01$ lub $\alpha = 0,05$, czasami $\alpha = 0,1$.

Chcielibyśmy by prawdopodobieństwa błędów pierwszego i drugiego rodzaju były jak najmniejsze. Niestety, gdy przy ustalonej statystyce testowej, zmieniamy W tak by malał błąd pierwszego rodzaju, to błąd drugiego rodzaju rośnie i na odwrót. Jedną z metod konstrukcji dobrego testu jest ustalenie poziomu istotności $\alpha \in (0,1)$, a następnie taki dobór testu by zminimalizować prawdopodobieństwo błędu II-go rodzaju. Takie podejście (jeśli tylko dla danego problemu testowania jest wykonalne) gwarantuje, że zminimalizujemy wartość błędu drugiego rodzaju, jednak nie będziemy wiedzieć do jakiego poziomu. Informację o tym uzyskamy analizując tzw. moc testu.

Definicja. *Moc testu* parametrycznego to funkcja zmiennej θ (gdzie θ to badany parametr) dana wzorem

$$\beta(\theta) \quad = \quad P(\text{test odrzuci } H_0|\theta), \text{ tzn.}$$

$$\beta(\theta) \quad = \quad P(\text{test odrzuci } H_0, \text{ gdy testowany parametr ma wartość } \theta).$$

W szczególności, jeśli $H_0 : \theta \in \Theta_0$, to

- dla $\theta_0 \in \Theta_0$ mamy

$$\begin{aligned} \beta(\theta_0) &= P(\text{test odrzuci } H_0|\theta_0) = P(\text{test odrzuci } H_0|H_0) = \\ &= \text{ prawdopodobieństwo błędu pierwszego rodzaju;} \end{aligned}$$

- dla $\theta_1 \notin \Theta_0$ mamy

$$\begin{aligned} \beta(\theta_1) &= P(\text{test odrzuci } H_0|\theta_1) = P(\text{test odrzuci } H_0|H_1) = \\ &= 1 - P(\text{test odrzuci } H_1|H_1) = \\ &= 1 - \text{ prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju.} \end{aligned}$$

Definicja. Najmniejszy poziom istotności, przy którym zaobserwowana wartość statystyki testowej prowadzi do odrzucenia H_0, nazywamy *p-wartością* (p-value) przeprowadzonego testu. Tzn.

$$\begin{aligned} p - \text{value} \leqslant \alpha \quad &\Rightarrow \quad \text{odrzucamy } H_0, \\ p - \text{value} > \alpha \quad &\Rightarrow \quad \text{przyjmujemy } H_0. \end{aligned}$$

UWAGA! Do wyników testowania statystycznego powinniśmy podchodzić z pewną rezerwą, zwłaszcza, gdy hipoteza alternatywna H_1 jest złożona. Jeśli statystyka testowa nie wpadnie do zbioru krytycznego, to stwierdzamy, że nie ma podstaw do odrzucenia H_0, co jeszcze nie oznacza, że H_0 należy uznać za prawdziwą.

Dalej skupimy się na testach statystycznych dla pojedynczej próby, dotyczących średniej i wariancji. Interesujące nas testy zostały zebrane w pliku *Wzory ze statystyki*. Przeanalizujemy teraz parę przykładów ich zastosowania.

Przykład 10. 3. Czas montowania bębna w pralce jest zmienną losową o rozkładzie normalnym z odchyleniem standardowym równym pół minuty. Norma techniczna przewiduje na tę czynność 6 minut. Wśród załogi panuje jednak przekonanie, że ten normatywny czas jest zbyt krótki. Zmierzono czas montowania bębna przez 6 losowo wybranych robotników i otrzymano następujące wyniki (w minutach): 6.2, 7.1, 6.3, 5.9, 5.5, 7.0.
Na poziomie istotności 0,05 stwierdzić czy przekonanie załogi jest słuszne.

Rozwiązanie przykładu 10.3:

Oznaczmy: X - czas montowania bębna w pralce. Z treści zadania wiemy, że X ma rozkład normalny ze znanym odchyleniem standardowym: $\sigma = 0,5$ min. Zapisujemy to natępująco

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \textit{ gdzie } \mu \textit{ nieznane, zaś } \sigma = 0,5.$$

Interesuje nas weryfikacja
$H_0 : \mu = 6$ *min*
przeciwko
$H_1 : \mu > 6$ *min.*

Widzimy, że do analizowanego problemu pasuje model oznaczony jako model I w tabeli Weryfikacje hipotez dotyczących wartości średniej. *Aby przeprowadzić opisany tam test, wyznaczymy wartość statystyki testowej i zbiór krytyczny a następnie sprawdzimy czy statystyka testowa należy do zbioru krytycznego. Zacznijmy od statystyki testowej:*

$$U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}.$$

Obliczenia przeprowadzimy w R:

```
> czas <- c( 6.2, 7.1, 6.3, 5.9, 5.5, 7.0)
> (mean(czas)-6)/0.5*sqrt(6)
```

Otrzymujemy $u \approx 1,633$. Teraz przejdzmy do wyznaczenia zbioru krytycznego:

$$W = \langle u_{1-\alpha}; +\infty) \,.$$

Mamy poziom istotności $\alpha = 0,05$, stąd $1 - \alpha = 0,95$ i $u_{1-\alpha} = u_{0,95}$:

```
> qnorm(0.95)
```

Otrzymujemy $u_{1-\alpha} \approx 1,645$, co daje $W \approx \langle 1,645; +\infty)$. Pozostaje wyciągnąć wnioski.

$$u \approx 1,633 \notin W \approx \langle 1,645; +\infty) \;\Rightarrow\; \textit{brak podstaw do odrzucenia } H_0.$$

Przekonanie załogi nie jest słuszne.

Przykład 10.4. Dział kontroli jakości w zakładach chemicznych chce oszacować średnią wagę proszku do prania sprzedawanego w pudełkach o nominalnej wadze 3 kg. Pobrano w tym celu próbkę losową 7 pudełek i otrzymano wyniki (w kg): 2.93, 2.97, 3.05, 2.91, 3.02, 2.87, 2.92. Wiadomo, że rozkład wagi pudełka proszku do prania jest normalny.
(a) Czy na poziomie istotności 0,05 można twierdzić, że faktyczna średnia waga pudełka proszku do prania jest mniejsza niż 3 kg?
(b) Zakładając, że rzeczywista średnia waga pudełka proszku do prania wynosi 2,9 kg, wyznaczyć prawdopodobieństwo, że przeprowadzając test na poziomie istotności 0,05 i na podstawie 7 obserwacji, błędnie uznamy, że średnia waga pudełka jest zgodna z podaną na pudełku.
(c) Jak liczną próbkę trzeba by pobrać, by przeprowadzony test (na poziomie istotności 0,05), w sytuacji, gdy rzeczywista średnia waga pudełka proszku do prania wynosi 2,9 kg, odrzucał hipotezę, że średnia waga pudełka jest zgodna z podaną na pudełku, z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż 0,9.

Rozwiązanie przykładu 10.4:

Oznaczmy: X-waga proszku do prania. Z treści zadania wiemy, że X ma rozkład normalny, ale parametrów tego rozkładu nie znamy. Zapisujemy to natępująco

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \text{ gdzie } \mu \text{ i } \sigma \text{ są nieznane.}$$

Stąd widzimy, że będzie nam pasować model oznaczony jako model II w tabeli Weryfikacje hipotez dotyczących wartości średniej.

Wpisujemy dane do R:

```
> waga.proszku <- c(2.93, 2.97, 3.05, 2.91, 3.02, 2.87, 2.92)
```

(a) Stawiamy hipotezy:
$H_0 : \mu = 3$ *kg*
$H_1 : \mu < 3$ *kg*
Do weryfikacji H_0 przeciwko H_1 użyjemy `t.test`:

```
> t.test(x=waga.proszku,alternative="less",mu=3)
```

$$p - value = 0,04952 < \alpha = 0,05 \Rightarrow \text{ odrzucamy } H_0.$$

Zatem uznajemy, że rzeczywiście faktyczna średnia waga pudełka proszku do prania jest mniejsza niż 3 kg.

Powyższy test można przeprowadzić także w inny sposób: wyznaczając wartość statystyki testowej i zbiór krytyczny oraz sprawdzając czy statystyka testowa należy do zbioru krytycznego. Zacznijmy od statystyki testowej:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s}\sqrt{n},$$

gdzie $\overline{X}$ to średnia z próby, s to odchylenie standardowe z próby, zaś n to liczność próby. Do rachunków użyjemy R:

> `(mean(waga.proszku)-3)/sd(waga.proszku)*sqrt(7)`
Otrzymujemy $t \approx -1,95$. *Przechodzimy do wyznaczenia zbioru krytycznego* W*:*

$$W = (-\infty; -t_{1-\alpha,n-1}\rangle\,,$$

gdzie $\alpha = 0,05$ *to poziom istotności, co daje* $1-\alpha = 0,95$. *Kwantyl* $t_{1-\alpha,n-1}$ *wyznaczymy przy pomocy* R:
> `qt(0.95,7-1)`
Mamy $t_{1-\alpha,n-1} \approx 1,943$*, co daje* $W \approx (-\infty; -1,943\rangle$. *Widzimy, że*

$$t \approx -1,95 \in W \approx (-\infty; -1,943\rangle\,,$$

więc odrzucamy H_0 *i stwierdzamy, że faktyczna średnia waga pudełka proszku do prania jest mniejsza niż 3 kg.*

(b) Zakładamy, że $\mu = \mu_1 = 2,9$. *Przy tym założeniu chcemy policzyć prawdopodobieństwo, że uznamy, że średnia waga pudełka jest zgodna z podaną na pudełku. Zatem szukamy prawdopodobieństwa, że przyjmiemy* H_0 *w sytuacji, gdy wartość badanego parametru to 2,9:*

$$P(\textit{przyjmiemy } H_0 | \mu = 2,9) = ?$$

Przypomniejmy, że

$$moc.testu(\beta) = P(\textit{odrzucimy } H_0 |\ \textit{badany parametr } = \beta).$$

Stąd

$$P(\textit{przyjmiemy } H_0|\mu = 2,9) = 1 - P(\textit{odrzucimy } H_0|\mu = 2,9) = 1 - moc.testu(2,9).$$

Użyjemy funkcji `power.t.test()`*, która jest związana z mocą t.testu. Ma ona następujące argumenty:*

- `power` - *moc testu,*
- `n` - *liczność próby,*
- `delta` $= |\mu_0 - \mu_1|$,
- `sd` - *odchylenie standardowe badanej cechy (tutaj wagi pudełka proszku do prania), nie znamy go, więc go przybliżamy odchyleniem standardowym z próby, mając jednak świadmość, że doprowadzi to nas do wyniku przybliżonego; argument* `sd` *jest domyślnie ustawiony na* 1,
- `sig.level` - *poziom istotności testu, domyślnie ustawiony na* 0.05,
- `type` - *mamy do wyboru* `type="one.sample","two.sample"` *lub* `"paired"`; *na razie zajmujemy się testami dla jednej populacji, więc wybieramy* `"one.sample"`,

- `alternative` - *mamy do wyboru* `alternative="one.sided"` *lub* `"two.sided"`:
  - `"one.sided"` *używamy, gdy* H_1 *jest postaci* $H_1 : \mu < \mu_0$ *lub* $H_1 : \mu > \mu_0$*,*
  - `"two.sided"` *używamy, gdy* H_1 *jest postaci* $H_1 : \mu \neq \mu_0$*.*

Jeden z pięciu pierwszych wyżej wymienionych argumentów funkcji `power.t.test()` *musimy zostawić pusty i właśnie ten argument zostanie wyliczony. Chcąc wyznaczyć* `sd` *lub* `sig.level` *należy napisać* `sd=NULL` *lub odpowiednio* `sig.level=NULL`*, aby do tych argumentów nie została automatycznie przypisana ich wartość domyślna.*

W celu rozwiązania naszego problemu napiszemy (`delta` $= |\mu_0 - \mu_1| = |3 - 2,9| = 0,1$):

```
> power.t.test(n=7,delta=0.1,sd=sd(waga.proszku),sig.level=0.05,
               type="one.sample",alternative="one.sided")
```

R *wypisze podane przez nas wartości argumentów i wyliczoną wartość mocy testu (power). Aby uzyskać szukane prawdopodobieństwo musimy od 1 odjąć wyliczoną wartość mocy testu. Możemy to zrobić automatycznie pisząc*

```
> 1-power.t.test(n=7,delta=0.1,sd=sd(waga.proszku),sig.level=0.05,
               type="one.sample",alternative="one.sided")$power
```

Otrzymujemy 0,0241. Jest to prawdopodobieństwo przyjęcia $H_0 : \mu = 3$ *kg w sytuacji, gdy* $\mu = 2,9$ *kg czyli prawdopodobieństwo popełnienia błędu. Zatem dobrze, że jest całkiem małe.*

(c) Nadal zakładamy, że $\mu = \mu_1 = 2,9$*. Przy tym założeniu szukamy* n *takiego by prawdopodobieństwo odrzucenia* H_0 *było nie mniejsze niż 0,9:*

$$\textit{szukamy } n \textit{ takiego by } P(\textit{odrzucimy } H_0 | \mu = 2,9) \geqslant 0,9$$

czyli

$$\textit{szukamy } n \textit{ takiego by } \textit{moc.testu}(2,9) \geqslant 0,9.$$

Użyjemy funkcji funkcji `power.t.test()`:

```
> power.t.test(power=0.9, delta=0.1, sd=sd(waga.proszku),
               sig.level=0.05, type="one.sample",
               alternative="one.sided")
```

Otrzymujemy $n = 5,186$ *co oznacza, że potrzebujemy próbkę o liczności* $n = 6$ *(zaokrąglamy do góry, aby moc testu nie spadła poniżej* $0,9$*).*

Przykład 10.5. Ogrodnik ma 5000 nasion białych i czerwonych tulipanów. Chciałby wiedzieć jaki procent owych nasion to nasiona tulipanów białych. Nasiona te przeznaczone są do sprzedaży, więc nie może ich wszystkich wysiać i sprawdzić, ile z nich zakwitnie na biało. Wybrał zatem losowo 100 nasion, posiał je i okazało się, że 13 z nich ma białe kwiaty.
(a) Czy na poziomie istotności 0,01 ogrodnik może stwierdzić, że nasiona białych tulipanów stanowią 10% wszystkich nasion?
(b) Czy zmieni się odpowiedź w punkcie (a) jeśli ogrodnik posieje jedynie 10 nasion i 2 z nich wykiełkują na biało?

Rozwiązanie przykładu 10.5:
Dane nasiono może być nasionem tulipana białego lub czerwonego. Mamy zatem do czynienia z rozkładem dwupunktowym. Oznaczmy:

$$X = \begin{cases} 1 & \textit{jeśli wybrane nasiono to nasiono białego tulipana,} \\ 0 & \textit{jeśli wybrane nasiono to nasiono czerwonego tulipana,} \end{cases}$$

zaś p niech będzie prawdopodobieństwem trafienia na nasiono tulipana białego, tzn. $p = P(X = 1)$.

(a) $\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{\textit{liczba sukcesów}}{\textit{liczba prób}} = \frac{13}{100} = 0,13$. Sukcesem jest wylosowanie nasiona tulupana białego, bo oznaczyliśmy że $X = 1$ właśnie wtedy, gdy wybrane nasiono to nasiono białego tulipana.

Teraz szukamy w tabeli zatytuowanej Weryfikacje hipotez dotyczących wartości średniej, *modelu, który pasuje do naszej sytuacji. Jest to model oznaczony numerem IV. Stawiamy hipotezy:*
$H_0 : p = 0,1$
$H_1 : p > 0,1$ *(wybrałam wersję $>$, bo $\hat{p} = 0,13$ sugeruje, że p może być większe niż $0,1$.)*
Zauważmy, że

- *$n\hat{p} = 13 \geqslant 5$ ($n\hat{p}$ to liczba sukcesów, czyli liczba wylosowanych nasion tulipanów białych),*
- *$n\hat{q} = 87 \geqslant 5$ ($\hat{q} = 1 - \hat{p}$, więc $n\hat{q}$ to liczba porażek, czyli liczba wylosowanych nasion tulipanów czerwonych).*

Zatem możemy użyć `prop.test()`, *czyli testu, w którym rozkład statystyki testowej jest przybliżany rozkładem normalnym:*
```
> prop.test(x=13,n=100,p=0.1,alternative="greater")
```
Powyżej argument `x` *oznacza liczbę otrzymanych sukcesów, a* `n` *- liczbę wszystkich prób. Odczytujemy p wartość:*

$$p - value = 0,2023 > \alpha = 0,01 \;\Rightarrow\; \textit{nie ma podstaw do odrzucenia } H_0,$$

gdzie $\alpha = 0,01$ *to poziom istotności testu. Wyciągamy więc wniosek, że ogrodnik może stwierdzić, że nasiona białych tulipanów stanowią 10% wszystkich nasion.*

(b) Nadal testujemy $H_0 : p = 0,1$ *przeciwko* $H_1 : p > 0,1$. *Jednak teraz* $n = 10$ *i* $k = 2$, *więc mamy*

$$n\hat{p} = 2 \ngeqslant 5$$

i nie możemy zastosować `prop.test()` *(wynika to stąd, że nie będzie działać przybliżenie rozkładem normalnym; aby ono działało muszą jednocześnie być spełnione oba warunki:* $n\hat{p} \geqslant 5$ *i* $n\hat{q} \geqslant 5$*). W tej sytuacji należy użyć testu dokładnego* `binom.test()`:

```
> binom.test(x=2,n=10,p=0.1,alternative="greater")
```

$$p - value = 0,2639 > \alpha = 0,01 \;\Rightarrow\; \textit{nie ma podstaw do odrzucenia } H_0,$$

zatem odpowiedź z punktu (a) nie ulega zmianie: ogrodnik może stwierdzić, że nasiona białych tulipanów stanowią 10% wszystkich nasion.

Przykład 10.6. Otrzymano następujące wyniki pomiarów grubości 6 wylosowanych detali wyprodukowanych przez zakupiony agregat (w mm.): 1.6, 1.7, 1.4, 1.5, 1.9, 1.5. Zakładamy, że rozkład grubości tego detalu jest normalny. Na poziomie istotności 0,05 zweryfikować hipotezę, że wariancja grubości detalu wykonanego przez agregat przekracza 0.03 mm^2.

Rozwiązanie przykładu 10.6:

Oznaczmy: X *- grubość detalu. Z treści zadania wiemy, że* X *ma rozkład normalny, ale parametrów tego rozkładu nie znamy. Zapisujemy to natępująco*

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \ \textit{gdzie } \mu \textit{ i } \sigma \textit{ są nieznane.}$$

Interesuje nas weryfikacja
$H_0 : \sigma^2 = 0,03\ mm^2$
przeciwko
$H_1 : \sigma^2 > 0,03\ mm^2$.

Powyższe hipotezy dotyczą wariancji. Patrzymy więc na dolną tabelę Weryfikacja hipotezy dotyczącej jednej wariancji. *Przedstawiony w niej jeden model pasuje do naszej sytuacji. Aby przeprowadzić opisany tam test, wyznaczymy wartość statystyki testowej i zbiór krytyczny a następnie sprawdzimy czy statystyka testowa należy do zbioru krytycznego. Zacznijmy od statystyki testowej:*

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2},$$

gdzie s^2 *to wariancja z próby. Rachunki wykonujemy w* R:

```
> grubosc <- c(1.6, 1.7, 1.4, 1.5, 1.9, 1.5)
```

```
> (6-1)*var(grubosc)/0.03
```

Statystyka testowa $\chi^2 \approx 5,333$. *Teraz zajmijmy się zbiorem krytycznym*

$$W = \left\langle \chi^2_{1-\alpha;n-1}; +\infty \right) .$$

Poziom istotności $\alpha = 0,05$, *zatem* $1 - \alpha = 0,95$. *Liczymy* $\chi^2_{1-\alpha;n-1} = \chi^2_{0,95;5}$*:*

```
> qchisq(0.95,5)
```

Otrzymujemy $\chi^2_{1-\alpha;n-1} \approx 11,0705$, *co daje* $W \approx \langle 11,0705; \infty)$. *Widzimy, że*

$$\chi^2 \approx 5,333 \notin W \approx \langle 11,0705; \infty) ,$$

więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Uznajemy, że wariancja grubości detalu wykonanego przez agregat nie przekracza 0,03 mm^2.