Literatura:

[1] J. Jakubowski, R. Sztencel „Wstęp do teorii prawdopodobieństwa”, Script, Warszawa 2010, wydanie IV.
[2] J. Koronacki, J. Mielniczuk, „Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych”, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2006.
[3] P. Grzegorzewski, K. Bobecka, A. Dembińska, J. Pusz „Rachunek Prawdopodobieństwa i Statystyka” WSISiZ, Warszawa 2005, wydanie IV poprawione.

1. PRAWDOPODOBIEŃSTWO I JEGO WŁASNOŚCI

Przydadzą się nam następujące oznaczenia i pojęcia.

1. Ω - dowolny niepusty zbiór, który oznaczać będzie *przestrzeń zdarzeń elementarnych*, czyli zbiór wszystkich możliwych wyników danego eksperymentu losowego.

Przykład 1.1. Jeśli raz rzucamy monetą, to $\Omega = \{O, R\}$.
Jeśli raz rzucamy kostką do gry, to $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Jeśli rzucamy monetą do momentu wyrzucenia reszki, to

$$\Omega = \{R, OR, OOR, OOOR, OOOOR, \ldots\}.$$

Jeśli wybieramy losowo punkt z odcinka $[0, 1]$, to $\Omega = [0, 1]$.

2. $\mathcal{F}$ - *przestrzeń zdarzeń losowych*, jest to σ-ciało podzbiorów Ω. Jeśli Ω jest zbiorem skończonym lub nieskończonym ale przeliczalnym, to za $\mathcal{F}$ można przyjąć rodzinę wszystkich pozbiorów Ω, np.

$$\Omega = \{O, R\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F} = \{\emptyset, \{O\}, \{R\}, \{O, R\}\};$$

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \ldots \{6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \ldots, \{1, 2, 3\}, \ldots, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Jeśli jednak zbiór Ω jest nieprzeliczalny, to sytuacja się komplikuje – gdybyśmy przyjęli, że $\mathcal{F}$ to rodzina wszystkich podzbiorów Ω, to mielibyśmy problem z przypisaniem zdarzeniom losowym prawdopodobieństw. Dlatego za $\mathcal{F}$ bierze się wtedy rodzinę mniejszą, rodzina ta musi tworzyć tzw. σ-ciało.

Definicja. *σ-ciało* (lub równoważnie *σ-algebra*) podzbiorów Ω to rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów Ω spełniająca następujące warunki:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. jeśli $A \in \mathcal{F}$, to $A' := \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$,

3. jeśli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, to $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

3. P - prawdopodobieństwo

Definicja. *Prawdopodobieństwem* nazywamy funkcję $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ spełniająca następujące warunki:

1. $P(A) \geqslant 0$ dla każdego $A \in \mathcal{F}$,
2. $P(\Omega) = 1$,
3. jeśli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ są zdarzeniami parami rozłącznymi (tzn. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$), to $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Definicja (Aksjomatyczna definicja prawdpodobieństwa)**.** *Przestrzenią probabilistyczną* nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, gdzie Ω to przestrzeń zdarzeń elementarnych (dowolny niepusty zbiór), $\mathcal{F}$ to σ-ciało podzbiorów Ω zaś P to prawdopodobieństwo.

Własności prawdopodobieństwa

1. $P(\emptyset) = 0$,
2. jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ są parami rozłączne (tzn. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$), to
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n),$$
3. $P(A') = 1 - P(A)$ dla $A \in \mathcal{F}$,
4. jeśli $A, B \in \mathcal{F}$ i $A \subset B$, to $P(A) \leqslant P(B)$,
5. jeśli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, to $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$,
6. jeśli $A, B \in \mathcal{F}$, to
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$
7. jeśli $A, B, C \in \mathcal{F}$, to
$$\begin{aligned} & P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) + \\ - \quad & P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C), \end{aligned}$$
8. (wzór włączeń i wyłączeń) jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, to
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n} P\left(\bigcap_{k=1}^{r} A_{i_k}\right).$$

Schemat klasyczny

Mamy skończoną liczbę zdarzeń elementarnych i wszystkie zdarzenia są jednakowo prawdopodobne. Wtedy:

- $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$,
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$ (tzn. za σ-ciało $\mathcal{F}$ przyjmujemy rodzinę wszystkich podzbiorów Ω),
- $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$ dla $A \subset \Omega$.

Prawdopodobieństwo geometryczne

Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω jest zbiorem nieskończonym, ale daje się modelować jako pewien ograniczony podzbiór $\mathbb{R}^n$ (prostej, płaszczyzny itd.). Wówczas za $\mathcal{F}$ możemy przyjąć *borelowskie σ-ciało* podzbiorów Ω (oznaczane $\mathcal{B}(\Omega)$), czyli najmniejsze σ-ciało do którego należą wszystkie otwarte podzbiory Ω. Natomiast prawdopodobieństwo określamy następująco

$$P(A) = \frac{\text{miara}(A)}{\text{miara}(\Omega)} \quad \text{dla } A \in \mathcal{B}(\Omega).$$

Np. gdy $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, to powyższy wzór przyjmuje postać:

$$P(A) = \frac{\text{pole}(A)}{\text{pole}(\Omega)} \quad \text{dla } A \in \mathcal{B}(\Omega).$$

Przykład 1.2. 20-to osobowa grupa studentów, w której jest 6 dziewcząt, ma 4 bilety do teatru, które postanowiła rozdzielić drogą losowania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród posiadaczy biletów
(a) znajdą się dokładnie 3 dziewczyny,
(b) znajdzie się co najmniej 1 dziewczyna?

Przykład 1.3. Między A i B jest jeden tor i pociągi, przebywające tę trasę w 10 minut, kursują według schematu: pociąg z A do B i pociąg z B do A startują niezależnie od siebie w losowych momentach między 7.00 a 8.00. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dotrą do celu?

Definicja. *Zdarzenia A i B są niezależne*, jeśli

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Ogólniej, zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$, gdzie $n \geqslant 2$, nazywamy niezależnymi, gdy dla każdego $k = 2, \ldots, n$ oraz $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$ mamy

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}).$$

Definicja. *Prawdopodobieństwem warunkowym zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B*, takiego że $P(B) > 0$, nazywamy liczbę

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Twierdzenie 1.1 (wzór na prawdopodobieństwo całkowite)**.** Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Jeśli $B_1, B_2, \ldots, B_n$ stanowią zupełny układ zdarzeń, tzn.

1. $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$,
2. $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$,
3. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są parami rozłączne, tzn. $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j$,
4. $P(B_1) > 0, P(B_2) > 0, \ldots, P(B_n) > 0$,

to dla dowolnego zdarzenia A mamy

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i).$$

Twierdzenie 1. 2 (wzór Bayesa)**.** Jeśli $B_1, B_2, \ldots, B_n$ stanowią zupełny układ zdarzeń, zaś A jest dowolnym zdarzeniem, takim że $P(A) > 0$, to

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Uwaga 1.1. Twierdzenia 1.1 i 1.2 pozostaną prawdziwe, gdy rozbicie, złożone ze skończonej liczby zbiorów $B_1, B_2, \ldots, B_n$, zastąpimy rozbiciem, złożonym z przeliczalnej liczby zbiorów $B_1, B_2, \ldots$.

Przykład 1. 4. Na 100 mężczyzn 5 nie rozróżnia kolorów. Natomiast na 1000 kobiet 2 nie rozróżniają kolorów. Z grupy o jednakowej ilości kobiet i mężczyzn wylosowano daltonistę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że to mężczyzna?