3 i 4. WEKTORY LOSOWE

Definicja. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_d$ będą zmiennymi losowymi określonymi niekoniecznie na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Wtedy wektor

$$\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$$

nazywamy *wielowymiarową (d-wymiarową) zmienną losową* lub inaczej *(d-wymiarowym) wektorem losowym.*

Aby opisać rozkład wektora losowego $\mathbb{X}$ nie wystarczy podać rozkładów zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_d$ (czyli tzw. *rozkładów brzegowych*), bo nie zawierają one informacji o zależnościach pomiędzy $X_1, X_2, \ldots, X_d$.

(a) W przypadku dyskretnych wektorów losowych (czyli wektorów losowych, gdzie $X_1, X_2, \ldots, X_d$ to zmienne losowe dyskretne) podajemy tzw. *łączną (d-wymiarową) funkcję masy prawdopodobieństwa*:

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_d) := P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_d = x_d).$$

Oczywiście musimy mieć

1. $p(x_1, x_2, \ldots, x_d) \geqslant 0$ dla każdego $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$,
2. $\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_d} p(x_1, x_2, \ldots, x_d) = 1$, gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$, dla których $p(x_1, x_2, \ldots, x_d) > 0$.

Ponadto powyższe warunki 1. i 2. gwarantują, że $p(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ jest łączną funkcję masy prawdopodobieństwa pewnego dyskretnego wektora losowego $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$.

Rozkład brzegowy zmiennej losowej X_i, $i = 1, 2, \ldots, d$, uzyskamy z łącznej funkcji masy prawdopodobieństwa $p(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ używając wzoru

$$P(X_i = x_i) = \sum_{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d} p(x_1, x_2, \ldots, x_d),$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d)$, dla których $p(x_1, x_2, \ldots, x_d) > 0$.

(b) W przypadku (absolutnie) ciągłych wektorów losowych podajemy tzw. *łączną (d-wymiarową) gęstość*, czyli nieujemną funkcję $f_{\mathbb{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ taką, że dla każdego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mamy

$$P(\mathbb{X} \in A) = \int_A f_{\mathbb{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_d) dx_1 dx_2 \ldots dx_d.$$

Skoro $P(\mathbb{X} \in \mathbb{R}^d) = 1$, to w szczególności otrzymujemy

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_{\mathbb{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_d) dx_1 dx_2 \ldots dx_d = 1. \tag{1}$$

Ponadto każda nieujemna funkcja $f_{\mathbb{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ spełniająca (1) jest łączną gęstością pewnego wektora losowego $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$. Gęstość brzegową zmiennej losowej X_i, $i = 1, 2, \ldots, d$, uzyskamy z gęstości łącznej $f_{\mathbb{X}}$ używając wzoru

$$f_{X_i}(x_i) = \int \ldots \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_{\mathbb{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_d) dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_d;$$

(c) Rozkład dowolnego wektora losowego możemy opisać poprzez *łączną (d-wymiarową) dystrybuantę*:

$$F_{\mathbb{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_d) = P(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \ldots, X_d \leqslant x_d);$$

dystrybuantę brzegową zmiennej losowej X_i, $i = 1, 2, \ldots, d$, uzyskamy z dystrybuanty łącznej $F_{\mathbb{X}}$ używając wzoru

$$F_{X_i}(x_i) = \lim_{x_j \to \infty, j=1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,d} F_{\mathbb{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_d).$$

Niezależność zmiennych losowych

Definicja. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_d$, tworzące wektor losowy $\mathbb{X}$, są *niezależne* wtedy i tylko wtedy, gdy ich łączna dystrybuanta to iloczyn dystrybuant brzegowych: dla każdego $(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ mamy

$$F_{\mathbb{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_d) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot F_{X_d}(x_d),$$

tzn. dla każdego $(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ zachodzi

$$P(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \ldots, X_d \leqslant x_d) = P(X_1 \leqslant x_1) P(X_2 \leqslant x_2) \ldots P(X_d \leqslant x_d).$$

Twierdzenie 3. 1. Jeśli $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ jest dyskretnym wektorem losowym, to $X_1, X_2, \ldots, X_d$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ mamy

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_d = x_d) = P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \ldots P(X_d = x_d);$$

natomiast jeśli $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ jest ciągłym wektorem losowym, to $X_1, X_2, \ldots, X_d$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ mamy

$$f_{\mathbb{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_d) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot f_{X_d}(x_d).$$

Kowariancja i współczynnik korelacji

W podrozdziale tym będziemy zakładać, że X i Y to zmienne losowe, takie że $E(X^2) < \infty$ i $E(Y^2) < \infty$. Założenie to gwarantuje, że istnieją skończone $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$ oraz $E(XY)$ zdefiniowane poniżej.

Definicja. *Kowariancją* zmiennych losowych X i Y nazywamy liczbę oznaczaną $Cov(X,Y)$ i daną wzorem

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y),$$

gdzie

$$E(XY) = \begin{cases} \sum_{k,l} x_k y_l P(X = x_k, Y = y_l) & \text{dla zmiennych losowych dyskretnych,} \\ \iint_{\mathbb{R}^2} xy f_{(X,Y)}(x,y)dxdy & \text{dla zmiennych losowych ciągłych.} \end{cases}$$

Definicja. *Współczynnikiem korelacji* zmiennych losowych X i Y, mających niezerowe wariancje, nazywamy liczbę oznaczaną ρ_{XY} lub ρ i daną wzorem

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Ponadto jeśli $\rho_{XY} = 0$, to mówimy, że zmienne losowe X i Y są *nieskorelowane.*

Twierdzenie 3.2. Niech X i Y to zmienne losowe o niezerowych wariancjach. Wtedy

(a) $-1 \leqslant \rho_{XY} \leqslant 1$.

(b) ρ_{XY} to pewna miara siły zależności liniowej pomiędzy X i Y. Dokładniej:

$$|\rho_{XY}| = 1 \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją } a \neq 0 \text{ i } b \in \mathbb{R}, \text{ takie że}$$
$$P(Y = aX + b) = 1 \ \ (a > 0 \text{ odpowiada przypadkowi } \rho_{XY} = 1$$
$$\text{zaś } a < 0 \text{ odpowiada przypadkowi } \rho_{XY} = -1);$$

Twierdzenie 3.3. Jeśli $a, b, c \in \mathbb{R}$, to

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c,$$

$$Var(aX + bY + c) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2abCov(X,Y).$$

Twierdzenie 3.4. Jeśli zmienne losowe X i Y są niezależne, to

$$E(XY) = EX \cdot EY,$$

co pociąga za sobą

$$Cov(X,Y) = 0$$

i dalej

$$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y).$$

Jeśli dodatkowo założymy, że wariancje X i Y są niezerowe, to otrzymamy

$$\rho_{XY} = 0.$$

Definicja. *Macierz kowariancji* wektora losowego $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$, takiego że $EX_i^2 < \infty$, $i = 1, \ldots, d$, to macierz zwykle oznaczana Σ i dana wzorem

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2_{X_1} & \sigma_{X_1X_2} & \cdots & \sigma_{X_1X_d} \\ \sigma_{X_2X_1} & \sigma^2_{X_2} & \cdots & \sigma_{X_2X_d} \\ \vdots & & & \\ \sigma_{X_dX_1} & \sigma_{X_dX_2} & \cdots & \sigma^2_{X_d} \end{bmatrix},$$

gdzie

- $\sigma^2_{X_j} = Var(X_j)$ dla $j = 1, 2, \ldots, d$;
- $\sigma_{X_jX_k} = Cov(X_j, X_k)$ dla $j \neq k$.

Twierdzenie 3. 5. Dana macierz jest macierzą kowariancji pewnego wektora losowego wtedy i tylko wtedy, gdy macierz ta jest symetryczna i nieujemnie określona.

Przykład 3. 1. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład dany tabelką

$X\backslash Y$	0	1	2
-1	$0,2$	0	0
0	$0,2$	a	0
1	0	$2a$	0
2	0	$0,1$	$2a$

.

a). Wyznaczyć $P(X = 0, Y = 1)$,
b). Podać rozkłady brzegowe X i Y,
c). Obliczyć $F(0, \frac{3}{2})$,
d). Sprawdzić czy X i Y są niezależne,
e). Podać rozkład zmiennej losowej $Z = X + Y$,
f). Obliczyć współczynnik korelacji X i Y.

Przykład 3. 2. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} Cx & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ i } 0 \leqslant y \leqslant 1 - x^2 \\ 0 & \text{dla pozostałych } (x,y). \end{cases}$$

a). Wyznaczyć stałą C,
b). Podać gęstości brzegowe X i Y,
c). Sprawdzić niezależność X i Y,
d). Obliczyć $F(\frac{1}{2}, 2)$,

Rozkład sumy zmiennych losowych

Twierdzenie 3.6. Niech wektor losowy (X, Y) ma gęstość $f(x, y)$. Wtedy zmienna losowa $Z = X + Y$ ma gęstość daną wzorem

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x, z - x)dx.$$

Przykład 3.3. Wektor losowy (X, Y) ma gęstość

$$f(x, y) = \begin{cases} y & \text{dla } (x, y) \in D \\ 0 & \text{dla } (x, y) \notin D, \end{cases}$$

gdzie $D = [1, 2] \times [0, 1]$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = X + Y$.

Pewne rozkłady sum niezależnych zmiennych losowych

Jeśli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ to niezależne zmienne losowe i

(1) X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, ma rozkład dwupunktowy o prawdopodobieństwie sukcesu θ, to

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \text{ ma rozkład dwumianowy } binom(n, \theta);$$

ogólniej, jeśli X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, ma rozkład dwumianowy $binom(m_i, \theta)$, to

$$X_1+X_2+\cdots+X_n \text{ ma rozkład dwumianowy } binom(m_1+m_2+\cdots+m_n, \theta).$$

(2) X_i ma rozkład Poissona $Pois(\lambda_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, to

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \text{ ma rozkład Poissona } Pois(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n);$$

(3) X_i ma rozkład normalny $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, to

$$X_1+X_2+\cdots+X_n \text{ ma rozkład normalny } \mathcal{N}(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n, \sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_n^2);$$

(4) X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, ma rozkład gamma $Gamma(a_i, s)$, to

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \text{ ma rozkład gamma } Gamma(a_1 + a_2 + \cdots + a_n, s).$$