5. RODZAJE ZBIEŻNOŚCI CIĄGÓW ZMIENNYCH LOSOWYCH. TWIERDZENIA GRANICZNE

Do dowodzenia twierdzeń granicznych, w których pojawia się poniżej zdefiniowana zbieżność według prawdopodobieństwa, przydatna bywa nierówność Czebyszewa.

Twierdzenie 5. 1 (Nierówność Czebyszewa)**.** Jeśli zmienna losowa X ma skończoną wariancję, to

$$\text{dla każdego } c > 0 \text{ mamy } P(|X - EX| \geqslant c) \leqslant \frac{Var(X)}{c^2}.$$

Przejdzmy teraz do omówienia różnych rodzajów zbieżności ciągów zmiennych losowych. Niech $X, X_1, X_2, \ldots$ będą zmiennymi losowymi określonymi na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Jeśli

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \quad \text{dla wszystkich } \omega \in \Omega, \tag{1}$$

to oczywiście powiemy, że ciąg zmiennych losowych (X_n) zbiega do zmiennej losowej X. Jednak w przypadku wielu zastosowań warunek (1) nie zachodzi. Zastępuje się go więc warunkami słabszymi, co prowadzi do różnych rodzajów zbieżności ciągów zmiennych losowych. Najważniejsze z nich to: zbieżność prawie na pewno (z prawdopodobieństwem 1), zbieżność według prawdopodobieństwa, zbieżność według p-tej średniej (w tym zbieżność średniokwadratowa) i zbieżność według rozkładu.

Definicja. Mówimy, że *ciąg zmiennych losowych* (X_n) *zbiega do zmiennej losowej* X *prawie na pewno (lub z prawdopodobieństwem 1)* i zapisujemy $X_n \xrightarrow{1} X$ jeśli

$$P(\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1.$$

Definicja. Mówimy, że *ciąg zmiennych losowych* (X_n) *zbiega do zmiennej losowej* X *według prawdopodobieństwa* i zapisujemy $X_n \xrightarrow{P} X$ jeśli

$$\text{dla każdego } \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) = 0.$$

Definicja. Niech $p > 0$. Mówimy, że *ciąg zmiennych losowych* (X_n) *zbiega do zmiennej losowej* X *według p-tej średniej* i zapisujemy $X_n \xrightarrow{L^P} X$ jeśli

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^p) = 0.$$

W szczególności, gdy $p = 2$, to zbieżność tą nazywamy *zbieżnością średniokwadratową*.

Definicja. Mówimy, że *ciąg zmiennych losowych* (X_n) *o dystrybuantach* F_n *zbiega do zmiennej losowej* X *o dystrybuancie* F *według rozkładu* i zapisujemy $X_n \xrightarrow{d} X$ jeśli

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}, \text{ który jest punktem ciągłości } F.$$

Zachodzą następujące zależności pomiędzy różnymi rodzajami zbieżności zmiennych losowych:

$$\begin{array}{ccc} \text{z prawdopodobieństwem 1} & & \text{według } p\text{-tej średniej (dla pewnego } p > 0) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ & \text{według prawdopodobieństwa} & \\ & \Downarrow & \\ & \text{według rozkładu} & \end{array}$$

Żadne inne wynikania, niż te przedstawione powyżej, nie zachodzą.

Twierdzenia graniczne

Twierdzenie 5.2 (Mocne prawo wielkich liczb Kołmogorowa)**.** Załóżmy, że (X_n) jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie o skończonej wartości oczekiwanej $\mu = E(X_1)$ i oznaczmy $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Wówczas

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{1} \mu.$$

Twierdzenie 5.3 (Poissona)**.** Jeśli (X_n) jest ciągiem zmiennych losowych takim, że $X_n \sim binom(n, p_n)$, gdzie $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$, to

$$X_n \xrightarrow{d} X \sim Pois(\lambda),$$

co pociąga za sobą

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{dla } k = 0, 1, \ldots.$$

Twierdzenie 5.4 (Centralne twierdzenie graniczne Lindeberga-Lévy'ego)**.** Załóżmy, że (X_n) jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie ze skończoną wariancją. Oznaczmy $\mu = E(X_1)$, $\sigma^2 = Var(X_1)$ i $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Wówczas

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} U \sim \mathcal{N}(0,1),$$

co inaczej możemy zapisać jako

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right) = \Phi(x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R},$$

gdzie Φ to dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0,1)$.

Przykład 5.1. Prawdopodobieństwo, że w kinder niespodziance znajdziemy stworka typu C wynosi 0,01. Pudło zawiera 100 kinderniespodzianek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że znajduje się w nich co najmniej jeden stworek typu C? Wynik dokładny porównać z wynikami uzyskanymi przy użyciu twierdzenia Poissona i centralnego twierdzenia granicznego.

Przykład 5.2. Rzucamy kostką do gry. Jeśli wypadną mniej niż 3 oczka dostajemy 1 punkt, jeśli wypadnie 6 oczek dostajemy 3 punkty, w pozostałych przypadkach 2 punkty. Ile należy wykonać rzutów, aby z prawdopodobieństwem 0,95 liczba zdobytych punktów przekroczyła 200?