7. PODSTAWOWE WŁASNOŚCI ESTYMATORÓW

W wykładzie tym przedstawimy kryteria, pozwalające ocenić jakość danego estymatora, bądź wybrać z pewnego zbioru ten, który w pewnym sensie jest najlepszy.

Precyzując pojęcie *najlepszy estymator* napotykamy dwa problemy.

1. Estymator parametru θ, $\hat{\theta} = t(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ jest zmienną losową, co oznacza, że jego wartość zależy od zdarzenia losowego $\omega \in \Omega$. Może się zdarzyć zatem tak, że dla $\hat{\theta}_1$ i $\hat{\theta}_2$ - konkurencyjnych estymatorów parametru θ - zachodzi

   $$|\theta - \hat{\theta}_1(\omega)| < |\theta - \hat{\theta}_2(\omega)| \text{ dla pewnych } \omega \in \Omega$$

   a

   $$|\theta - \hat{\theta}_1(\omega)| > |\theta - \hat{\theta}_2(\omega)| \text{ dla innych } \omega \in \Omega.$$

   Mamy zatem sytuację, że dla pewnych zdarzeń losowych wartości pierwszego estymatora są bliższe szacowanego parametru θ niż wartości drugiego estymatora, a dla innych zdarzeń losowych jest na odwrót. Stosując takie porównanie nie jesteśmy w stanie rozstrzygnąć, który estymator jest lepszy. Problem ten można rozwiązać rozważając wartości oczekiwane estymatorów bądź ich funkcji. Takie podejście doprowadziło do definicji obciążenia i błędu średniokwadratowego estymatora, podanych dalej w tym wykładzie.

2. Nie znamy wartości szacowanego parametru θ, a miary jakości estymatora bądź zachodzenie dla niego danych własności mogą od θ zależeć. Dlatego zwykle żąda się by miara przyjmowała optymalną wartość, a własność zachodziła dla każdej $\theta \in \Theta$.

Estymatory nieobciążone

Definicja. Mówimy, że $\hat{\theta} = t(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ jest *nieobciążonym estymatorem* parametru θ jeśli

$$E_\theta(\hat{\theta}) = \theta \quad \text{dla każdego } \theta \in \Theta.$$

W pozostałych przypadkach $\hat{\theta}$ nazywamy *estymatorem obciążonym.* Funkcję $B(\theta) = E_\theta(\hat{\theta}) - \theta$, gdzie $\theta \in \Theta$, nazywamy *obciążeniem estymatora* $\hat{\theta}$.

Z powyższych definicji natychmiasyt wynika, że $\hat{\theta}$ jest estymatorem nieobciążonym wtedy i tylko wtedy, gdy jego obciążenie jest funkcją tożsamościowo równą zero.

Przykład 7.1. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie prostą próbą losową z populacji X o rozkładzie z wartością oczekiwaną $EX = \mu$. Wówczas $\hat{\mu} = \bar{X}$ jest nieobciążonym estymatorem parametru μ.

Przykład 7. 2. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie prostą próbą losową z populacji X o rozkładzie z wartością oczekiwaną $EX = \mu$ i dodatnią wariancją $Var(X) = \sigma^2 > 0$. Załóżmy, że nie znamy ani μ ani σ^2. Wówczas

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

jest estymatorem obciążonym parametru σ^2, bo

$$E_{(\mu,\sigma^2)}(\hat{\sigma^2}) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2,$$

natomiast

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

jest estymatorem nieobciążonym σ^2.

Definicja. Mówimy, że ciąg estymatorów $\hat{\theta}_n = t_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ parametru θ jest *asymptotycznie nieobciążony* jeśli

$$\lim_{n\to\infty} E_\theta(\hat{\theta}_n) = \theta \quad \text{dla każdego } \theta \in \Theta.$$

Błąd średniokwadratowy estymatora

Porządaną własnością estymatora parametru θ jest to by jego rozproszenie wokół szacowanej θ było małe. Rozproszenie to możemy mierzyć jako wartość oczekiwaną z kwadratu różnicy między estymatorem i θ.

Definicja. Funkcję

$$MSE_{\hat{\theta}}(\theta) = E_\theta\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2, \quad \text{gdzie } \theta \in \Theta,$$

nazywamy *błędem średniokwadratowym estymatora* $\hat{\theta}$ parametru θ.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} MSE_{\hat{\theta}}(\theta) &= E_\theta\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 = E_\theta\left(\hat{\theta} - E_\theta\hat{\theta} - (\theta - E_\theta\hat{\theta})\right)^2 \\ &= E_\theta\left(\hat{\theta} - E_\theta\hat{\theta}\right)^2 - 2(\theta - E_\theta\hat{\theta})E_\theta\left(\hat{\theta} - E_\theta\hat{\theta}\right) + (\theta - E_\theta\hat{\theta})^2 = \\ &= Var_\theta(\hat{\theta}) + (B(\theta))^2, \qquad (1) \end{aligned}$$

bo $E_\theta\left(\hat{\theta}-E_\theta\hat{\theta}\right)=E_\theta\hat{\theta}-E_\theta\left(E_\theta\hat{\theta}\right)=E_\theta\hat{\theta}-E_\theta\hat{\theta}=0$. Oznacza to, że błąd średniokwadratowy estymatora to suma jego wariancji i kwadratu obciążenia. W szczególności dla nieobciążonych estymatorów $\hat{\theta}$ parametru θ wzór (1) redukuje się do

$$MSE_{\hat{\theta}}(\theta)=Var_\theta(\hat{\theta}),$$

i minimalizowanie błędu średniokwadratowego jest równoważne minimalizowaniu wariancji.

Estymatory zgodne

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie zależnym od parametru $\theta \in \Theta$. Dla dowolnego naturalnego n tworzymy próbę losową $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i na jej podstawie budujemy estymator $\hat{\theta}_n = t_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ parametru θ.

Definicja. Mówimy, że ciąg estymatorów $\hat{\theta}_n = t_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $n \geqslant 1$, parametru θ jest

- *zgodny w sensie zbieżności średniokwadratowej* jeśli błąd średniokwadratowy $\hat{\theta}_n$ zbiega do zera wraz ze wzrostem liczności próby do nieskończoności:

$$\lim_{n\to\infty} E_\theta\left((\hat{\theta}_n-\theta)^2\right)=0 \qquad \text{dla wszystkich } \theta\in\Theta;$$

- *mocno zgodny* jeśli z prawdopodobieństwem 1 realizacje $\hat{\theta}_n$ dążą do θ, gdy liczność próby wzrasta do nieskończoności

$$P_\theta\left(\lim_{n\to\infty}\hat{\theta}_n=\theta\right)=1 \qquad \text{dla wszystkich } \theta\in\Theta;$$

- *(słabo) zgodny* jeśli dla dostatecznie dużych liczności próby estymator $\hat{\theta}_n$ z dużym prawdopodobieństwem przyjmuje wartości bliskie θ:

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta\left(|\hat{\theta}_n-\theta|<\varepsilon\right)=1 \qquad \text{dla każdego } \varepsilon>0 \text{ i dla wszystkich } \theta\in\Theta.$$

W terminach rodzajów zbieżności ciągów zmiennych losowych

- zgodność w sensie zbieżności średniokwadratowej oznacza, że ciąg $\hat{\theta}_n$ zbiega w sensie zbieżności średniokwadratowej do θ: $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2} \theta$;
- mocna zgodność oznacza, że ciąg $\hat{\theta}_n$ zbiega z P_θ-prawdopodobieństwem 1 do θ: $\hat{\theta}_n \xrightarrow{1} \theta$;
- słaba zgodność oznacza, że ciąg $\hat{\theta}_n$ zbiega według prawdopodobieństwa do θ: $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$.

Wiemy, że dla ciągu zmiennych losowych zarówno z jego zbieżności średniokwadratowej jak i ze zbieżności z z prawdopodobieństwem 1 wynika jego zbieżność według prawdopodobieństwa. Stąd każdy estymator zgodny w sensie zbieżności średniokwadratowej jak i każdy estymator mocno zgodny jest zgodny.

Twierdzenie 7. 1. Jeśli ciąg estymatorów $\hat{\theta}_n$ parametru θ jest asymptotycznie nieobciążony i

$$\lim_{n\to\infty} Var_\theta(\hat{\theta}_n) = 0 \quad \text{dla każdego } \theta \in \Theta,$$

to $\hat{\theta}_n$ jest zgodnym ciągiem estymatorów.

Przykład 7.3. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z nieznaną wartością oczekiwaną μ. Z mocnego prawa wielkich liczb Kołmogorowa natychmiast wynika, że $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ jest mocno zgodnym estymatorem parametru μ. Stąd $\bar{X}_n$ jest też słabo zgodnym estymatorem μ.

Jeśli dodatkowo założymy, że $X_1, X_2, \ldots$ mają skończoną wariancję σ^2, to otrzymamy, że $\bar{X}_n$ jest także zgodnym w sensie zbieżności średniokwadratowej estymatorem μ.

Przykład 7. 4. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z nieznanymi wartością oczekiwaną μ i wariancją σ^2. Wtedy

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad \text{i} \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

są mocno zgodnymi estymatorami parametru σ^2. Zatem są to także estymatory słabo zgodne. Ponadto, przy dodatkowym założeniu, że $X_1, X_2, \ldots$ mają skończony czwarty moment centralny, zarówno $\hat{\sigma^2}$ jak i S^2 są zgodnymi w sensie zbieżności średniokwadratowej estymatorami parametru σ^2.

Przykład 7. 5. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z populacji X o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, \theta]$, gdzie $\theta > 0$. W przykładzie 7.6 wyznaczyliśmy następujące estymatory parametru θ:

$$\hat{\theta}_{MM} = 2\bar{X},\ \hat{\theta}_{NW} = X_{n:n}.$$

(a) $E_\theta(\hat{\theta}_{MM}) = \theta$, co oznacza, że estymator $\hat{\theta}_{MM}$ jest nieobciążony.
$E_\theta(\hat{\theta}_{NW}) = \frac{n}{n+1}\theta \neq \theta$, więc estymator $\hat{\theta}_{NW}$ jest obciążony. Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} E_\theta(\hat{\theta}_{NW}) = \theta,$$

jest on asymptotycznie nieobciążony.
(b) Błędy średniokwadratowe rozważanych estymatorów wynoszą:

$$MSE_{\hat{\theta}_{MM}}(\theta) = \frac{\theta^2}{3n},\ MSE_{\hat{\theta}_{NW}}(\theta) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\theta^2.$$

(c) Estymator $\hat{\theta}_{MM}$ jest mocno zgodny, zaś $\hat{\theta}_{NW}$ jest słabo zgodny. Można pokazać, że $\hat{\theta}_{NW}$ jest także mocno zgodny, ale to przekracza zakres naszego wykładu.

Własności estymatorów największej wiarygodności

Estymatory otrzymane metodą największej wiarygodności, przy dość ogólnych założeniach, mają dobre własności asymptotyczne - można pokazać, że jeśli są spełnione pewne warunki regularności, to estymatory te są mocno zgodne i asymptotycznie nieobciążone.