Podstawowe statystyki próbkowe i funkcje w R wyliczające te statystyki	
średnia z próby: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$, > mean(dane)	wariancja z próby: $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2$ > var(dane)

Oznaczenia podstawowych kwantyli i funkcje w R wyliczające te kwantyle		
dla rozkładu normalnego	dla rozkładu t-Studenta	dla rozkładu chi-kwadrat
u_α	$t_{\alpha,n}$	$\chi^2_{\alpha,n}$
> qnorm(α)	> qt(α, n)	> qchisq(α, n)

Przedziały ufności na poziomie ufności $1-\alpha$	
dla wartości średniej μ	**dla wariancji σ^2 (odchylenia standardowego σ)**
Model I. Cecha $X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu$ - nieznane, σ - znane	
$\overline{x} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	
Model II. Cecha $X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu$ - nieznane, σ - nieznane	
$\overline{x} - t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$ `> t.test(x,conf.level)$conf.int` gdzie: `x` określa wektor z danymi, `conf.level` określa poziom ufności	$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}$
Model III. Cecha X ma rozkład dowolny o skończonej wariancji, próba jest duża ($n \geqslant 100$)	
$\overline{x} - u_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + u_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$	
Model IV. Cecha X ma rozkład dwupunktowy $P(X=1) = p, P(X=0) = q = 1-p$, p - nieznane	

$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{\text{ilość sukcesów}}{\text{ilość prób}}$, $\hat{q} = 1 - \hat{p}$
`> binom.test(x,n,conf.level)$conf.int`
gdzie: `x` i `n` określają liczbę sukcesów i liczbę prób,
`conf.level` określa poziom ufności.
Jeśli n jest duże i $n\hat{p} > 5$ i $n\hat{q} > 5$, to można wyznaczyć przybliżony przedział asymptotyczny używając:
`> prop.test(x,n,conf.level)$conf.int`	

Wyznaczanie niezbędnej ilości pomiarów do próby do oszcowania wartości średniej μ z maksymalnym błędem d na poziomie ufności (1-α)
Model I. Cecha $X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu$ **-** nieznane**,** σ **-** znane $n \geqslant \left(u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{d}\right)^2$
Model II. Cecha $X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu$ **-** nieznane**,** σ **-** nieznane $n \geqslant \left(t_{1-\alpha/2,n_0-1}\frac{s_0}{d}\right)^2$ gdzie n_0 i s_0 to liczność i odchylenie standardowe pobranej próby wstępnej
Model III. Cecha X ma rozkład dowolny o skończonej wariancji, próba jest duża ($n \geqslant 100$) $n \geqslant \left(u_{1-\alpha/2}\frac{s_0}{d}\right)^2$ gdzie s_0 jest odchyleniem standardowym pobranej próby wstępnej
Model IV. Cecha X ma rozkład dwupunktowy $P(X=1) = p, P(X=0) = q = 1-p$, p - nieznane $n \geqslant u^2_{1-\alpha/2}\frac{p_0 q_0}{d^2}$ jeżeli znany jest szacunkowy procent p_0 (wtedy $q_0 = 1 - p_0$) $n \geqslant u^2_{1-\alpha/2}\frac{1}{4d^2}$ jeżeli nie jest znany szacunkowy procent p_0

Weryfikacje hipotez dotyczących wartości średniej na poziomie istotności α		
UWAGA: jeżeli wyznaczone wartości statystyk testowych (U lub T) należą do W, to H_0 odrzucamy.		
Model I. $X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu$ - nieznane, σ - znane. Hipoteza zerowa $H_0 : \mu = \mu_0$. Statystyka testowa $U = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$.		
Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu \neq \mu_0$ Zbiór krytyczny $W = \left(-\infty; -u_{1-\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}; +\infty\right)$	Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu > \mu_0$ Zbiór krytyczny $W = \langle u_{1-\alpha}; +\infty)$	Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu < \mu_0$ Zbiór krytyczny $W = (-\infty; -u_{1-\alpha}\rangle$
Model II (t.test). $X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu$ - nieznane, σ -nieznane. Hipoteza zerowa $H_0 : \mu = \mu_0$. Statystyka testowa $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{s}\sqrt{n}$.		
Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu \neq \mu_0$ Zbiór krytyczny $W = \left(-\infty; -t_{1-\alpha/2,n-1}\right\rangle \cup \left\langle t_{1-\alpha/2,n-1}; +\infty\right)$	Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu > \mu_0$ Zbiór krytyczny $W = \langle t_{1-\alpha,n-1}; +\infty)$	Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu < \mu_0$ Zbiór krytyczny $W = (-\infty; -t_{1-\alpha,n-1}\rangle$
Model III. X ma rozkład dowolny (próba duża: $n \geqslant 100$). Hipoteza zerowa $H_0 : \mu = \mu_0$. Statystyka testowa $U = \frac{\overline{X}-\mu_0}{s}\sqrt{n}$.		
Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu \neq \mu_0$ Zbiór krytyczny $W = \left(-\infty; -u_{1-\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}; +\infty\right)$	Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu > \mu_0$ Zbiór krytyczny $W = \langle u_{1-\alpha}; +\infty)$	Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu < \mu_0$ Zbiór krytyczny $W = (-\infty; -u_{1-\alpha}\rangle$
Model IV (prop.test). X ma rozkład dwupunktowy $P(X = 1) = p, P(X = 0) = q = 1 - p$, p - nieznane, $n\hat{p} \geqslant 5$ i $n\hat{q} \geqslant 5$, gdzie $\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{\text{ilość sukcesów}}{\text{ilość prób}}$, $\hat{q} = 1 - \hat{p}$. Hipoteza zerowa $H_0 : p = p_0$. Statystyka testowa $U = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0\,(1-p_0)}{n}}}$.		
Hipoteza alternatywna $H_1 : p \neq p_0$ Zbiór krytyczny $W = \left(-\infty; -u_{1-\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}; +\infty\right)$	Hipoteza alternatywna $H_1 : p > p_0$ Zbiór krytyczny $W = \langle u_{1-\alpha}; +\infty)$	Hipoteza alternatywna $H_1 : p < p_0$ Zbiór krytyczny $W = (-\infty; -u_{1-\alpha}\rangle$
Jeśli w **modelu IV** nie jest spełnione założenie, że $n\hat{p} \geqslant 5$ i $n\hat{q} \geqslant 5$, to zamiast prop.test używamy testu dokładnego **binom.test**.		

WAŻNA UWAGA: W momencie, gdy stwierdzimy, że do rozważanego problemu pasuje nam model III z tabeli *Weryfikacje hipotez dotyczących wartości średniej* to, tak samo jak dla modelu II, możemy używać funkcji `t.test()` i `power.t.test()`. Wynika to stąd, że dla dużych n mamy $t_{\alpha,n} \approx u_\alpha$.

Weryfikacja hipotezy dotyczącej jednej wariancji na poziomie istotności α		
Model. $X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu$ - nieznane, σ - nieznane. Hipoteza zerowa $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$. Statystyka testowa $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$.		
Hipoteza alternatywna $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ Zbiór krytyczny $W = \left(0, \chi^2_{\alpha/2;n-1}\right\rangle \cup \left\langle \chi^2_{1-\alpha/2;n-1}; +\infty\right)$	Hipoteza alternatywna $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ Zbiór krytyczny $W = \left\langle \chi^2_{1-\alpha;n-1}; +\infty\right)$	Hipoteza alternatywna $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ Zbiór krytyczny $W = \left(0; \chi^2_{\alpha;n-1}\right\rangle$
UWAGA: jeżeli wyznaczona wartość statystyki testowej χ^2 należy do W, to H_0 odrzucamy.		

<table>
<tr><th colspan="2">Weryfikacja hipotezy dotyczącej równości dwóch wariancji na poziomie istotności α</th></tr>
<tr><td colspan="2">Model I. (test F: var.test)
$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, μ_X, μ_Y, σ_X, σ_Y - nieznane,
dysponujemy niezależnymi próbami losowymi z tych populacji.
Hipoteza zerowa $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$.</td></tr>
<tr><td>Hipoteza alternatywna $H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$
Statystyka testowa $F = s_1^2/s_2^2$ (w liczniku jest większa z wariancji).
Zbiór krytyczny
$W = \langle F(1-\alpha/2, n_1 - 1, n_2 - 1); +\infty)$,
gdzie n_1 oznacza liczność próby o większej wariancji próbkowej.</td><td>Hipoteza alternatywna $H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$
Statystyka testowa $F = s_X^2/s_Y^2$
Zbiór krytyczny
$W = \langle F(1-\alpha, n_X - 1, n_Y - 1); +\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Powyżej $F(\alpha, n, m)$ oznacza kwantyl rozkładu F-Snedecora: $<$ qf(α, n, m)</td></tr>
<tr><td colspan="2">UWAGA: jeżeli wyznaczona wartość statystyki testowej F należy do W, to H_0 odrzucamy.</td></tr>
</table>

Test zgodności χ^2-Pearsona na poziomie istotności α
H_0: badana próba losowa pochodzi z zadanego rozkładu (lub rodziny rozkładów) H_1: badana próba losowa nie pochodzi z zadanego rozkładu (lub rodziny rozkładów)
Statystyka testowa $\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_j - n\,p_j^0)^2}{n\,p_j^0}$, gdzie k - liczba klas, n_j - liczba obserwacji, które znalazły się w j-tej klasie, n - liczność próby, p_j^0 - prawdopodobieństwo wpadnięcia obserwacji do j-tej klasy przy założeniu prawdziwości H_0 (jeśli H_0 nie jest hipotezą prostą, to brakujące parametry rozkładu z H_0 wyznaczamy metodą NW)
Zbiór krytyczny $W = \left\langle \chi^2_{1-\alpha,k-1-r}; +\infty \right)$, r jest ilością parametrów szacowanych z próby
UWAGA: jeżeli $\chi^2 \in W$ to hipotezę zerową H_0 odrzucamy.

Test zgodności χ^2-Pearsona jest zaimplementowany w R, niestety jedynie dla prostych hipotez H_0:

```
> chisq.test(x, p)
```

gdzie

- `x` to wektor z licznościami poszczególnych klas,
- `p` to wektor z prawdopodobieństwami teoretycznymi p_j^0 poszczególnych klas.

Weryfikacje hipotez dotyczących dwóch średnich na poziomie istotności α

UWAGA: jeżeli wyznaczone wartości statystyk testowych (U lub T) należą do odpowiednich zbiorów krytycznych, to H_0 odrzucamy.

Model I. $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, μ_1, μ_2 - nieznane, σ_1, σ_2 - znane; dysponujemy niezależnymi próbami losowymi z tych populacji.
Hipoteza zerowa $H_0 : \mu_1 = \mu_2$. Statystyka testowa $U = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$.

Hipoteza alternatywna	Hipoteza alternatywna	Hipoteza alternatywna
$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$H_1 : \mu_1 < \mu_2$
Zbiór krytyczny	Zbiór krytyczny	Zbiór krytyczny
$W = (-\infty; -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}; +\infty)$	$W = \langle u_{1-\alpha}; +\infty)$	$W = (-\infty; -u_{1-\alpha}\rangle$

Model II.(unpaired t-test: t.test(...,paired=FALSE,var.equal=TRUE))
$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, μ_1, μ_2 - nieznane, σ_1, σ_2 - nieznane, ale takie, że $\sigma_1 = \sigma_2$; dysponujemy niezależnymi próbami losowymi z tych populacji.
Hipoteza zerowa $H_0 : \mu_1 = \mu_2$. Statystyka testowa $T = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$.

Hipoteza alternatywna	Hipoteza alternatywna	Hipoteza alternatywna
$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$H_1 : \mu_1 < \mu_2$
Zbiór krytyczny	Zbiór krytyczny	Zbiór krytyczny
$W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2}\right\rangle \cup \left\langle t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2}; +\infty\right)$	$W = \langle t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}; +\infty)$	$W = (-\infty, -t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}\rangle$

Jeśli w **modelu II** nie jest spełnione założenie, że $\sigma_1 = \sigma_2$, to zamiast t.test(...,paired=FALSE,var.equal=TRUE) należy użyć **t.test(...,paired=FALSE,var.equal=FALSE)**

Model III.(paired t-test: t.test(..., paired=TRUE))
$X - Y \sim N(\mu_Z, \sigma_Z^2)$, μ_Z, σ_Z - nieznane. Dysponujemy parami obserwacji, gdzie pary są wzajemnie niezależne.
Hipoteza zerowa $H_0 : \mu_1 = \mu_2$. Statystyka testowa $T = \frac{\overline{z}}{s_z}\sqrt{n}$, gdzie $z_i = x_i - y_i, i = 1, 2, \ldots, n$.

Hipoteza alternatywna	Hipoteza alternatywna	Hipoteza alternatywna
$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$H_1 : \mu_1 < \mu_2$
Zbiór krytyczny	Zbiór krytyczny	Zbiór krytyczny
$W = \left(-\infty; -t_{1-\alpha/2, n-1}\right\rangle \cup \left\langle t_{1-\alpha/2, n-1}; +\infty\right)$	$W = \langle t_{1-\alpha, n-1}; +\infty)$	$W = (-\infty; -t_{1-\alpha, n-1}\rangle$

Model IV. Cechy X, Y mają rozkłady dowolne ($n_1 \geqslant 100$, $n_2 \geqslant 100$), $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ - nieznane; dysponujemy niezależnymi próbami losowymi z tych populacji.
Hipoteza zerowa $H_0 : \mu_1 = \mu_2$. Statystyka testowa $U = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}$.

Hipoteza alternatywna	Hipoteza alternatywna	Hipoteza alternatywna
$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$H_1 : \mu_1 < \mu_2$
Zbiór krytyczny	Zbiór krytyczny	Zbiór krytyczny
$W = (-\infty; -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}; +\infty)$	$W = \langle u_{1-\alpha}; +\infty)$	$W = (-\infty; -u_{1-\alpha}\rangle$

Model V (prop.test). Cechy X, Y mają rozkłady dwupunktowe, $P(X = 1) = p_1 = 1 - P(X = 0)$, $P(Y = 1) = p_2 = 1 - P(Y = 0)$, p_1, p_2 - nieznane, $n_1\hat{p}_1 \geqslant 5$ i $n_1(1 - \hat{p}_1) \geqslant 5$ i $n_2\hat{p}_2 \geqslant 5$ i $n_2(1 - \hat{p}_2) \geqslant 5$.
Hipoteza zerowa $H_0 : p_1 = p_2$. Statystyka testowa $U = \frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\overline{p}\overline{q}}{n}}}$, gdzie $\hat{p}_1 = \frac{k_1}{n_1}$, $\hat{p}_2 = \frac{k_2}{n_2}$, $\overline{p} = \frac{k_1+k_2}{n_1+n_2}$, $\overline{q} = 1- \overline{p}$, $n = \frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}$.

Hipoteza alternatywna	Hipoteza alternatywna	Hipoteza alternatywna
$H_1 : p_1 \neq p_2$	$H_1 : p_1 > p_2$	$H_1 : p_1 < p_2$
Zbiór krytyczny	Zbiór krytyczny	Zbiór krytyczny
$W = (-\infty; -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}; +\infty)$	$W = \langle u_{1-\alpha}; +\infty)$	$W = (-\infty; -u_{1-\alpha}\rangle$

Jeśli w **modelu V** nie jest spełnione założenie, że n_1, n_2 są wystarczająco duże, to zamiast prop.test należy zastosować dokładny test Fishera **fisher.test** oparty na rozkładzie hipergeometrycznym.