Zadanie 6.3

a) $H_0: \theta = \frac{1}{3}$, $H_1: \theta = \frac{1}{2}$

$$p_\theta(x) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} \quad , x = 0,1$$

Funkcja wiarygodności przyjmuje postać: $L(\theta, x_1, \dots, x_n) = f_\theta(x_1) \cdot \ldots \cdot f_\theta(x_n) = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}$

Zatem na mocy lematu Neymana-Pearsona szukany test to taki, który odrzuca hipotezę zerową H_0 pod warunkiem, że $\frac{L(\theta_0, x_1, \dots, x_n)}{L(\theta_1, x_1, \dots, x_n)} \leq k^*$

Stąd:

$$\frac{L(\frac{1}{3}, X_1, \dots X_n)}{L(\frac{1}{2}, X_1, \dots, X_n)} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i} \left(1-\frac{1}{3}\right)^{n-\sum_{i=1}^n X_i}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i} \left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-\sum_{i=1}^n X_i}} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-\sum_{i=1}^n X_i}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\cancel{\sum_{i=1}^n X_i}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-\cancel{\sum_{i=1}^n X_i}}} =$$

$$= \frac{\cancel{\left(\frac{1}{3}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i}} \cdot 2^{n-\sum_{i=1}^n X_i} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-\cancel{\sum_{i=1}^n X_i}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3^n} \cdot 2^{n-\sum_{i=1}^n X_i} \leq k^*$$

$$n - \sum_{i=1}^n X_i \leq \log_2\left(\frac{3^n}{2} k^*\right)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i \geq n - \log_2\left(\frac{3^n}{2} k^*\right) = \tilde{k}$$

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq \tilde{k} \mid \tfrac{1}{3}\right) = \alpha$$

$$P\left(\sum_{i=1}^n Y_i \geq \tilde{k}\right) = \alpha \rightarrow P\left(\sum_{i=1}^n Y_i < \tilde{k}\right) = 1-\alpha \quad , Y_i \sim p_{1/3}(x)$$

$$Z = \sum_{i=1}^n Y_i \quad , Z \sim \mathrm{binom}(n, \tfrac{1}{3})$$

$$P(Z \leq \tilde{k}-1) = 1-\alpha \quad , \alpha = \tfrac{1}{27}$$

rozkład jest nieciągły, więc nie można zmienić „<" na „≤" bez konsekwencji, jednak zamiast $Z < \tilde{k}$, można zapisać $Z \leq \tilde{k}+1$, bo $Z \in \mathbb{Z}$

Test odrzuca H_0, gdy $\sum_{i=1}^n X_i \geq \tilde{k}$

$(\tilde{k}-1)$ - kwantyl rzędu $\underbrace{1-\alpha}_{=\frac{26}{27}}$ rozkładu $\mathrm{binom}(n, \frac{1}{3})$

czyli: $\tilde{k} = \left[\text{kwantyl rzędu } \frac{26}{27} \text{ rozkładu } \mathrm{binom}(n, \tfrac{1}{3})\right] + 1$

Statystyka testowa: $T = \sum_{i=1}^n X_i$

Zbiór krytyczny: $W = \langle \tilde{k}, \infty)$