Egzamin z AM I - część teoretyczna

Wymagana jest znajomość wszystkich zagadnień omawianych na wykładzie (w szczególności definicji i twierdzeń) w ciągu całego semestru (bez ostatniego wykładu dotyczącego całki Riemanna). Wskazana jest umiejętność podawania przykładów.
Ponadto wymagane będą dowody następujących twierdzeń i faktów:

1) Ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę.
2) Jeśli ciąg jest zbieżny, to jest ograniczony.
3) Ciąg Eulera $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony z góry.
4) Tw. Weierstrassa I.
5) Tw.Weierstrassa II.
6) Jeśli $f : D \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza na D, to jest jednostajnie ciągła.
7) Warunek konieczny różniczkowalności (czyli jeśli f jest różniczkowalna w x_0, to jest ciągła w x_0.)
8) Tw. o działaniach arytmetycznych na pochodnych.
9) Tw. Lagrange'a.
10) Związek monotoniczności funkcji ze znakiem pierwszej pochodnej (wnioski 9.1-9.3 i tw 9.4 i 9.5)
11) Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego.
12) Warunek konieczny istnienia punktu przegięcia w $(x_0, f(x_0))$ (dowód przy dodatkowym założeniu, że istnieje $\delta > 0$ taka, że f'' istnieje w $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ i jest ciągła w x_0).
13) Wyprowadzenie wzoru na całki $\int \sqrt{x^2+K}dx$ i $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$.
14) Wyprowadzenie wzorów potrzebnych do przeprowadzenia podstawienia uniwersalnego.

Przykładowy zestaw pytań na część teoretyczną egzaminu (czas: 60 min)

(1) Podać definicję kresu dolnego zbioru.
Powołując się bezpośrednio na definicję uzasadnić, że liczba 0,99 nie jest kresem dolnym zbioru

$$\{(1+\tfrac{1}{n})^2 :\ n \in \mathbb{N}\}.$$

(2) Podać definicję ciagu ograniczonego.
Czy każdy ciąg ograniczony jest zbieżny? Odpowiedź uzasadnić.
Sformułować twierdzenie o 3 ciągach.

(3) Sformułować i udowodnić twierdzenie Weierstrassa II.

(4) Podać definicje funkcji wypukłej i funkcji wklęsłej.
Podać przykład funkcji, która jest jednocześnie wypukła i wklęsła (rysunek lub wzór).
Czy funkcja dwukrotnie różniczkowalna na przedziale P i taka, że $f''(x_0) = 0$ dla pewnego $x_0 \in P$, musi mieć punkt przegięcia w x_0? Odpowiedź uzasadnić.

(5) Używając podstawienia uniwersalnego, obliczyć całkę $\int \frac{dx}{\cos x+\sin x+1}$ (wyprowadzić wzory potrzebne do tego podstawienia).