Algebra i teoria mnogości
Przykładowe zadania egzaminacyjne.

1. Czy funkcja $f : R \to R$ dana wzorem $f(x) = x^2 + 1$ jest surjekcją, injekcją, bijekcją? Odpowiedzi uzasadnij. Znajdź obraz i przeciwobraz przedziału $(-1, 2)$.

2. Czy zbiór wielomianów o współczynnikach wymiernych z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia wielomianów jest pierścieniem? Czy jest ciałem? Odpowiedzi uzasadnij.

3. Znaleźć wszystkie liczby zespolone sprzężone ze swoją piątą potęgą.

4. Gdzie leżą na płaszczyźnie zespolonej te liczby z, które spełniają warunek:
   (a) $|z - 1| + |z + 1| = 3$
   (b) $|z - 1| + |z + 1| = 2$
   (c) $|z - 1| + |z + 1| = 1$

5. Rozłożyć na ułamki proste w ciele liczb rzeczywistych i zespolonych funkcje wymierne:
   (a) $\frac{x+3}{-2-x+2x^3+x^4}$
   (b) $\frac{x^2+1}{9+6x+19x^2+12x^3+11x^4+6x^5+x^6}$

6. Współrzędne wektora v w bazie $A = (u_1, u_2, u_3)$ wynoszą $[2, 1, 3]$. Znaleźć jego współrzędne w bazie $B = (u_1 - u_2, 2u_1 + u_2 + u_3, u_1 - u_2 + u_3)$.

7. Dana jest macierz $M_B^A(\phi) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, gdzie $A = (u_1, u_2, u_3)$, $B = (2u_1 + u_2, u_1 - u_2 + u_3, 3u_1 + 2u_3)$. Znaleźć $M_A^A(\phi)$, $M_B^B(\phi)$, $M_A^B(\phi)$.

8. Czy istnieje przekształcenie liniowe $\phi : R^3 \to R^3$, takie, że $\phi([2, 1, 1]) = [2, 1, 2]$, $\phi([2, 1, 2]) = [2, 1, 1]$, $\phi([2, 1, 3]) = [2, 1, 0]$, $\phi([2, 1, 0]) = [2, 1, 3]$? Jeśli istnieje to czy jest ono wyznaczone jednoznacznie?

9. Wykazać, że $det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right] = detA\ detC$, gdzie A i C są macierzami kwadratowymi odpowiednio stopnia k i $n - k$.

10. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x & +2y & -z & +u & -v & = & 5 \\ 2x & +y & -3z & +u & +3v & = & 4 \\ 3x & & -5z & +u & +v & = & 6 \end{cases}$$

11. Przedyskutować rozwiązalność układu równań w zależności od parametru a:

$$\begin{cases} ax & +y & -z & +u & +2v & = & 3 \\ 2x & -y & +az & -u & +2v & = & 1 \\ 3x & +ay & -z & +u & +az & = & 2 \end{cases}$$

12. Dane jest przekształcenie liniowe ϕ takie, że $M_A^A(\phi) = A$. Znaleźć taką bazę B, by ϕ miało w tej bazie macierz diagonalną.

(a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & -6 & -2 & -6 \\ -14 & 4 & 3 & 3 \\ -11 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix}$

13. Dana jest macierz A. Znaleźć macierz diagonalną J i taką macierz B, by $J = B^{-1}AB$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

14. Obliczyć A^{30}, gdzie $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$