Algebra i Teoria Mnogości
Zestaw zadań nr 1

1. Sprawdzić, czy następujące wyrażenia są tautologiami:
   (a) $p \vee [(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$,
   (b) $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)]$,
   (c) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$,
   (d) $(q \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)]$,
   (e) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow r]$.
2. Sprawdzić, czy następujące formuły są spełnialne:
   (a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$,
   (b) $(q \Rightarrow (p \wedge r)) \wedge \neg ((p \vee q) \Rightarrow (p \vee r))$.
3. W miejsce znaku $\diamond$ wstawić symbol spójnika logicznego, tak aby otrzymane zdanie złożone było tautologią
   (a) $p \diamond (p \vee q)$,
   (b) $[q \Rightarrow \neg(q \diamond p)] \Rightarrow p \vee \neg q$,
   (c) $[(p \Rightarrow q) \diamond \neg q] \Rightarrow \neg p$.
4. Spójnik $|$ zwany *kreską Sheffera* definiujemy następująco: $p \mid q \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$. Sporządzić tabelkę dla tego spójnika. Uzasadnić, że spójniki logiczne: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ są definiowalne za pomocą tego spójnika.
5. Niech $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad B = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \quad C = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

   Wskazać wszystkie elementy i podzbiory każdego z tych zbiorów.
6. Czy podana równość jest prawdziwa? Podać dowód lub kontrprzykład.
   (a) $A \cup (B \setminus C) = [(A \cup B) \setminus C] \cup (A \cap C)$,
   (b) $(A \cup B \cup C) \setminus (B \cup C) = A$,
7. Wykazać prawdziwość implikacji $(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow (A \setminus D) \subseteq (B \setminus C)$.
8. Różnicą symetryczną dwóch zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzą równości:
   (a) $A \div B = \emptyset \Leftrightarrow A = B, \quad A \div \emptyset = A, \quad A \div B = (A \cup B) - (A \cap B)$,
   (b) $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$,
   (c) $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$.