Algebra i Teoria Mnogości
Zestaw zadań nr 10

1. Sprawdzić, czy dana funkcja jest przekształceniem liniowym.

1.1. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi((x, y, z)) = (2x + y - 3, 5x)$

1.2. $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(w) = (w'(1), w(2))$

1.3. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi((x, y, z)) = (y, 4x + 3y - z)$

1.4. $\varphi : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$, $\varphi(w) = 2j + 1 + w(2 - j)$

1.5. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi((x, y, z)) = (x + z, xy - 4z)$

1.6. $\varphi : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$, $\varphi(w) = (2j + 3)w(-2 + j)$

2. Wyznaczyć bazę i wymiar jądra i obrazu przekształcenia liniowego φ.

Czy przekształcenie φ jest nieosobliwe?

2.1. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad (x, y, z) \mapsto (x + 2y - z, 0)$

2.2. $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi(ax^2 + bx + c) = (2c - a - 3b, a - b, c - 2a)$

2.3. $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ $\quad w \mapsto (w(3), w'(1))$

2.4. $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi((x, y, z, t)) = (x - 2y, 3y + 3z, x - y + z)$.

2.5. $\varphi : \mathbb{C}_3[x] \to \mathbb{C}$ $\quad \varphi(w) = (1 - 3j)w(1 + 3j)$

2.6. $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ $\quad (\varphi(w))(x) = (x - 1)w'(x) - 2w(x)$

3. Dla jakich wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, które spełnia warunki $\varphi((1, 2)) = (3, 0)$, $\varphi((4, 7)) = (8, 5)$, $\varphi((a, 1)) = (-1, b)$?

4. Uzasadnić, że istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe φ, które spełnia podane warunki. Wyznaczyć wzór tego przekształcenia.

4.1. $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi(-x + 3) = (3, 9, 5)$, $\quad \varphi(x + 1) = (-3, 3, 3)$, $\quad \varphi(3x^2 + 2x - 1) = (0, 0, 0)$

4.2. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ $\quad \varphi((3, 0, 0)) = 3x^2 - 6$, $\quad \varphi((1, -1, 0)) = 0$, $\quad \varphi((1, 2, 1)) = x^2 - 2$

4.3. $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi(4x^2 - 3x - 1) = (-4, 1, -6)$, $\quad \varphi(-x^3 - 4x^2) = (3, -3, 0)$, $\quad \varphi(4x^2 - 2x - 1) = (-3, 1, -4)$, $\quad \varphi(5) = (5, -5, 0)$

5. Czy przekształcenie liniowe φ jest izomorfizmem?

5.1. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[x]$ $\quad \varphi((a,b)) = ax^2 + bx + a - 2b$

5.2. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi((x,y,z)) = (x - 2y, 2y + 3z, x + 3z)$.

5.3. $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi(ax^2 + bx + c) = (a - b, 2a - b + c, c - 2a)$

5.4. $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ $\quad (\varphi(w))(x) = (x+1)w'(-x)$

$6^\star$. Wykazać, że jeśli $\varphi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym nieosobliwym i układ $(v_1, ..., v_n)$ w przestrzeni V jest liniowo niezależny to układ $(\varphi(v_1), ..., \varphi(v_n))$ w przestrzeni W jest również liniowo niezależny.

$7^\star$. Wykazać, że przestrzeń liniowa $((V,+), \mathbb{Q}, \cdot)$, gdzie $V = \{a + b\sqrt{5} + c\sqrt{7} : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$, jest izomorficzna z $\mathbb{Q}^3$.