Algebra i Teoria Mnogości
Zestaw zadań nr 11

1. Wykazać, że układ $\mathcal{A} = (4x^2 + x + 3, x^2 + x + 1, x^2 + 1)$ tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$.
Wyznaczyć $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$ jeśli $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(w) = (w(1), w'(-2))$, $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$.

2. Wyznaczyć macierze $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$, $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\psi)$, $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(\psi \circ \varphi)$, jeśli
$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi((x, y, z)) = (x + z, 2x - y, x - 3z)$,
$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\psi((x, y, z)) = (2x - y, y - z)$,
$\mathcal{A} = ((1, 2, -1), (3, 1, 1), (0, 1, 2))$, $\mathcal{B} = ((1, 1, -1), (-1, 0, 1), (0, 0, 1))$, $\mathcal{C} = ((0, 1), (1, 2))$.

3. Niech φ będzie symetrią płaszczyzny względem prostej $y = \frac{1}{2}x$.
Niech $\mathcal{A} = ((1, 0), (0, 1))$, $\mathcal{B} = ((2, 1), (1, -2))$. Wyznaczyć $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(id)$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(id)$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ i $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$.

4. Dana jest macierz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ przekształcenia liniowego $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_1[x]$

w bazach $\mathcal{A} = ((-3, 5, 4), (1, -1, -1), (2, -3, -2))$, $\mathcal{B} = (x + 1, 2x - 1)$.
Korzystając z macierzy zmiany bazy wyznaczyć macierz przekształcenia φ w bazach kanonicznych.
Wyznaczyć wzór $\varphi((a, b, c))$.

5. Wykazać, że istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,
takie że $\varphi((1, -5, 1)) = (0, -1)$, $\varphi((1, 0, -2)) = (2, 3)$, $\varphi((0, -4, 3)) = (-1, 2)$.
Wyznaczyć macierz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$, jeśli $\mathcal{A} = ((1, -5, 1), (1, 0, -2), (0, -4, 3))$, $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$.

Korzystając z macierzy zmiany bazy wyznaczyć macierz przekształcenia φ w bazach kanonicznych.
Wyznaczyć wzór przekształcenia φ.

6. Znaleźć macierz przekształcenia $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$; $(\varphi(w))(x) = 2w(x) - (x+1) \cdot w'(x)$
w bazach kanonicznych oraz w bazach $\mathcal{A} = (x^2+1, x+1, x^2+2x+1)$ i $\mathcal{B} = (2x+1, 5x+4)$.
Wyznaczyć rząd przekształcenia φ. Czy jest ono nieosobliwe?

7. Dana jest macierz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$ przekształcenia liniowego $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
w bazach $\mathcal{A} = ((1,0,0),(1,-1,0),(1,-1,-1))$, $\mathcal{B} = ((7,1),(2,-3))$.
Znaleźć współrzędne wektora $v = (1,3,-2)$ w bazie $\mathcal{A}$ i wyznaczyć $\varphi((1,3,-2))$.

8. Korzystając z macierzy zmiany bazy wyznaczyć współrzędne wektora $v \in \mathbb{R}^3$
w bazie kanonicznej oraz w bazie $\mathcal{B} = ((-1,1,1),(1,0,1),(2,1,3))$,
jeśli wiadomo, że $M_{\mathcal{A}}(v) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ dla $\mathcal{A} = ((1,1,2),(1,2,4),(0,2,3))$.