

Algebra i Teoria Mnogości

Zestaw zadań nr 13

1. Uzasadnić, że istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dla którego $\varphi((1, 2, 2)) = (0, 2, 2)$, $\varphi((0, 2, 2)) = (1, 2, 2)$, $\varphi((3, 1, 0)) = (3, 4, 2)$. Znaleźć wszystkie jego wartości i wektory własne.

2. Sprawdzić, czy wektory $(4, -3, -2)$ i $(5, -3, 1)$ są wektorami własnymi przekształcenia $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\varphi((x, y, z)) = (-x + 2y + z, -4x + 5y + 2z, 2x - 2y).$$

Wyznaczyć wszystkie wartości i wektory własne przekształcenia φ .
Wyznaczyć macierz przekształcenia φ w bazie składającej się z wektorów własnych.

3. Wykazać, że przekształcenie $\varphi : \mathbb{C}_2[x] \rightarrow \mathbb{C}_2[x]$, takie że

$$(\varphi(w))(x) = (2x + 1)w(x) + (1 - x^3)w''(x)$$

jest przekształceniem liniowym. Wyznaczyć wszystkie zespolone wartości własne oraz przynajmniej jeden wektor własny przekształcenia φ .

4. Wyznaczyć macierz odwracalną C i macierz diagonalną D , takie że $A = CDC^{-1}$.

$$4.1. A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad 4.2. A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \quad 4.3. A = \begin{bmatrix} & 3j & -2 + 2j \\ 2j + 2 & & j \end{bmatrix}$$

5. Czy $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ jest wektorem własnym macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$?

Wyznaczyć wymiary przestrzeni własnych. Czy macierz jest diagonalizowalna?

Wyznaczyć $f(A)$ jeśli $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 3x^2 + 4x - 2$.

6. Wyznaczyć wszystkie wartości własne macierzy $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Czy A jest diagonalizowalna?

Wyznaczyć (jeśli istnieją) stałe $p, q \in \mathbb{R}$ dla których zachodzi $A^4 = pA^2 + qA$.

7. Czy $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ jest wektorem własnym macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$?

Czy macierz A jest diagonalizowalna? Obliczyć A^{199} .