Algebra i Teoria Mnogości
Zestaw zadań nr 2

1. Zapisać symbolicznie następujące zdania i formy zdaniowe:
   (a) nie ma największej liczby rzeczywistej,
   (b) p jest liczbą pierwszą,
   (c) kwadrat żadnej liczby naturalnej nie jest ujemny,
   (d) największy wspólny dzielnik liczb a i b wynosi 7,
   (e) nie każda liczba naturalna nieparzysta jest podzielna przez 3.

2. Czy następujące zdania są prawdziwe?
   (a) $(\forall\, x \in N)(\exists\, y \in N)(x < y)$, (a') $(\exists\, y \in N)(\forall\, x \in N)(x < y)$,
   (b) $(\forall\, x \in N)(\exists\, y \in N)(y < x)$, (b') $(\exists\, y \in N)(\forall\, x \in N)(y \leqslant x)$,
   (c) $(\forall\, x \in N)(\forall\, y \in N)[x < y \Rightarrow (\exists z \in N)(x < z \wedge z < y)]$.

3. Czy następujące zdania są prawami rachunku kwantyfikatorów? Jesli tak, to je udowodnić, jeśli nie, to znaleźć kontrprzykład.
   (a) $\forall x[\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)] \Rightarrow [\forall x\, \Phi(x) \Rightarrow \forall x \Psi(x)]$,
   (b) $\forall x[\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)] \Rightarrow [\exists x\, \Phi(x) \Rightarrow \exists x \Psi(x)]$,
   (c) $\forall x[\Phi(x) \vee \Psi(x)] \Rightarrow [\forall x\, \Phi(x) \vee \forall x \Psi(x)]$,
   (d) $\exists x[\Phi(x) \wedge \Psi(x)] \Rightarrow [\exists x\, \Phi(x) \wedge \exists x \Psi(x)]$.

   Czy implikacje odwrotne są prawdziwe?

4. Napisać zaprzeczenia poniższych wyrażeń bez użycia symbolu negacji:
   (a) $(\exists\, y \in N)(\forall\, x \in N)\ y \leqslant x$,
   (b) $\forall\, x, y \in R\, [x < y \Rightarrow \exists\, q \in Q\, (x < q < y)]$.

5. Wyznaczyć $\bigcup_{t \in T} A_t$, $\bigcap_{t \in T} A_t$, gdzie rodzina A_t określona jest następująco:
   (a) $A_t = \{x \in R : 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{t+1}\}$, gdzie $t \in N$, $t \in \langle 0, +\infty)$,
   (b) $A_t = \{x \in R : t^2 < x < (t+1)^2\}$, gdzie $t \in N$, $t \in \langle 0, +\infty)$,
   (c) $A_t = \{x \in R : x^2 + (2 - t^2)x - 2t^2 = 0\}$, gdzie $t \in R$,
   (d) $A_t = \{x \in R : 3 + (-1)^t - \frac{(-1)^t}{t} < x < 7 + (-1)^t - \frac{(-1)^t}{t}\}$, gdzie $t \in N$,
   (e) $A_t = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leqslant t^2\}$, gdzie $t \in R$,
   (f) $A_t = \{(x, y) \in R^2 : x = ty\}$, gdzie $t \in R$.

6. Dla rodziny $A_{n,m} = \{x \in R : n^2 \leqslant x \leqslant m^2\}$ wyznaczyć:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{n,m}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{n,m}.$$

7. Niech $A_{m,n} = (m-n, m+n) = \{x \in R : m-n < x < m+n\}$. Wyznaczyć:

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{m} A_{m,n}, \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{m,n}, \quad \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{m,n}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{m,n}.$$

8. Dowieść, że

(a) $\bigcup_{t\in T}(A_t \cap B_t) \subseteq \bigcup_{t\in T} A_t \cap \bigcup_{t\in T} B_t$,

(b) $\bigcap_{t\in T} A_t \times \bigcap_{s\in S} B_s = \bigcap_{t\in T} \bigcap_{s\in S}(A_t \times B_s)$.