Algebra i Teoria Mnogości
Zestaw zadań nr 3

(1) Wykazać metodą indukcji matematycznej. ($k|m$ oznacza „liczba m jest podzielna przez liczbę k”, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$)

(a) $\forall n \in \mathbb{N}\ \ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + .. + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}\ \ 8|5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1$

(c) $\forall n \in (\mathbb{N} \setminus \{1\})\ \ 10|2^{2^n} - 6$

(2) Czy podana funkcja jest injekcją? Czy jest surjekcją? Podać dowód lub kontrprzykład.

(a) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

(c) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + 2x - 1$

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x + y, x - 2y)$

(e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = (x + 1)\cos y$

(f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x + y - 1, 2^{|x|})$

(3) Wyznaczyć podane obrazy i przeciwobrazy zbiorów.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 4x + 3,$

$f([1, 4)),\ f((0, 4)),\ f(\mathbb{R}),\ f^{-1}(\mathbb{R}_-),\ f^{-1}(f((2, 4]))$

(b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ f(k) = \log_2(k^2 + 1)$

$f(\{-1\}),\ f^{-1}(\{-1\}),\ f^{-1}(f(\{0, 1\})),\ f(f^{-1}((-\infty, 2]))$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = (y + 2) \cdot \sin x$

$f((0, \pi] \times \{2\pi\}),\ f^{-1}(\{0\}),\ f^{-1}\left(f\left(\left\{\frac{\pi}{2}\right\} \times (-\infty, -2]\right)\right)$

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto (x + 3)(x + y + 1)$

$f(\{-2\} \times (5, 11]),\ f((-3, 0) \times \{2\}),\ f^{-1}(f(\{-3\}^2))$

(4) Niech X będzie zbiorem niepustym, χ_Z oznacza funkcję charakterystyczną zbioru $Z \subseteq X$.

Wykazać, że podane równości zachodzą dla dowolnych zbiorów $A, B \subseteq X$ i dowolnego $x \in X$.

(a) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$

(b) $\chi_{A'}(x) = 1 - \chi_A(x)$

(5) Niech $f : X \longrightarrow Y$, $A, B \subset X$, $A_t \subset X$ dla każdego $t \in T$, $C, D \subset Y$, $B_t \subset T$ dla każdego $T \in T$. Wykazać, że

(a) $f(\bigcup_{t\in T} A_t) = \bigcup_{t\in T} f(A_t)$, $\quad f^{-1}(\bigcup_{t\in T} B_t) = \bigcup_{t\in T} f^{-1}(B_t)$

(b) $f(\bigcap_{t\in T} A_t) \subset \bigcap_{t\in T} f(A_t)$, $\quad f^{-1}(\bigcap_{t\in T} B_t) = \bigcap_{t\in T} f^{-1}(B_t)$

(c) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$, $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

(d) $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$, $f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D) = f^{-1}(C \setminus D)$

(e) $A \subset f^{-1}(f(A))$, $f(f^{-1}(C)) = C \cap f(X)$

(6) Przy założeniach poprzedniego zadania podać przykłady, że

(a) $f(\bigcap_{t\in T} A_t) \neq \bigcap_{t\in T} f(A_t)$

(b) $f(A) \setminus f(B) \neq f(A \setminus B)$

(c) $A \neq f^{-1}(f(A))$, $f(f^{-1}(C)) \neq C$

Przy jakich założeniach zachodzą równości?

(7) Czy podana relacja jest relacją równoważności w zbiorze X? Jeśli tak, to wyznaczyć przynajmniej jedną klasę abstrakcji.

(a) $X = \mathbb{Z}$, $k\rho m \Leftrightarrow \sim (2|km)$

(b) $X = 2^{\mathbb{N}}$, $A\rho B \Leftrightarrow 1 \in (A \cup B')$.

(c) $X = \mathbb{Z}$, $k\rho m \Leftrightarrow 8|k^2 - m^2$

(d) $X = (\mathbb{N} \cup \{0\})^2$, $(k,l)\rho(m,n) \Leftrightarrow k + n = l + m$

(e) $X = \mathbb{Z}$, $k\rho m \Leftrightarrow k + m \neq 5$

(f) $X = \mathbb{R}[x]$, $w_1\rho w_2 \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ w_1(x) - w_2(x) = ax^3$

(g) $X = \mathbb{R}$, $x\rho y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$

(h) $X = \mathbb{N}$, $k\rho m \Leftrightarrow (k \mid m \vee m \mid k)$

(8) Udowodnić, że $9|4^k + 24k - 1$ dla dowolnej liczby $k \in \mathbb{N}$. Wykazać, że w zbiorze $\mathbb{N}$ relacja $k\rho m \Leftrightarrow 9|4^k + 24m - 1$ jest relacją równoważności i wyznaczyć klasę abstrakcji elementu 3.