Algebra i Teoria Mnogości
Zestaw zadań nr 4

(1) Wykazać, że zbiór $\mathbb{R}$ z działaniem $x \star y = x + y + 1$ dla $x, y \in \mathbb{R}$ jest grupą abelową.

(2) Niech X będzie zbiorem niepustym. Wykazać, że zbiór $2^X = \{A : A \subset X\}$ z działaniami $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ i $A \cap B$ dla $A, B \subset X$ jest pierścieniem przemiennym z jednością.

(3) Niech $\mathbb{R}^{[0;1]}$ oznacza zbiór wszystkich funkcji z $[0; 1]$ w $\mathbb{R}$. Niech dla dowolnych funkcji $f, g : [0; 1] \to \mathbb{R}$ funkcja $f + g : [0; 1] \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ dla $x \in [0; 1]$, a funkcja $f \cdot g : [0; 1] \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ dla $x \in [0; 1]$. Wykazać, że zbiór $\mathbb{R}^{[0;1]}$ z działaniami $(f, g) \mapsto f + g$ i $(f, g) \mapsto f \cdot g$ jest pierścieniem przemiennym z jednością. Czy jest też ciałem z tymi działaniami? Czy ma dzielniki zera?

(4) Wykazać, że w dowolnej grupie $(G, \cdot)$ zachodzi dla dowolnych elemantów $a, b, c \in G$
   (a) jeśli $a \cdot b = a \cdot c$ to $b = c$ oraz jeśli $b \cdot a = c \cdot a$ to $b = c$
   (b) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$, $(a^{-1})^{-1} = a$

(5) Czy zbiór $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ z działaniem $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ jest grupą? Czy z dodatkowym działaniem $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2)$ jest pierścieniem?

(6) Niech $\mathbb{Z}[x]$ oznacza zbiór wielomianów o współczynnikach całkowitych zmiennej x. Czy $\mathbb{Z}[x]$ z działaniami dodawania i mnożenia wielomianów jest pierścieniem przemiennym z jednością? Czy jest ciałem?

(7) Napisać tabelki działań w $\mathbb{Z}_5$ i $\mathbb{Z}_6$. Czy są pierścieniami, czy są ciałami? Wskaż dzielniki zera i elementy odwracalne.

(8) Wykazać, że w dowolnym pierścieniu $(P, +, \cdot)$ z jednością zachodzi dla dowolnych $a, b \in P$

(a) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0,\ (-1) \cdot a = a \cdot (-1) = -a$

(b) $-(-a) = a,\ -(a + b) = -a + (-b)$

(c) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

(9) Niech $\mathbb{Q}(5) = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Pokazać, że $(\mathbb{Q}(5), +, \cdot)$ jest ciałem.