Algebra i Teoria Mnogości
Zestaw zadań nr 5

1. Niech $z_1 = 5 - 2j$, $z_2 = 3 + 4j$. Obliczyć $z_1^2 + jz_2$, $\quad \mathrm{Im}\,(z_1 \cdot z_2)$, $|\overline{z}_1 - 3\mathrm{Re}\, z_2|$, $\quad \dfrac{\overline{z}_1 - j|z_2|}{z_1}$.

2. Wykazać, że podane równości zachodzą dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$.

2.1. $\mathrm{Re}\,(jz) = -\mathrm{Im}\, z$

2.2. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\, z$

2.3. $\mathrm{Im}\,(jz) = \mathrm{Re}\, z$

2.4. $z - \overline{z} = 2j\,\mathrm{Im}\, z$

3. Wykazać, że relacja $z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z}_2 \in \mathbb{R}$ jest relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Wyznaczyć klasę abstrakcji elementu $3 - 2j$.

4. Obliczyć

4.1. $\dfrac{(-\sqrt{2} - \sqrt{6}j)^{15}}{(2 - 2j)^{22}}$

4.2. $\left(\dfrac{j+3}{j-2}\right)^{101}$

4.3. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+j}{1-j}\right)^{300}$

4.4. $\left(\sqrt{\sqrt{2}+1} + j\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^{10}$

5. Narysować podane zbiory na płaszczyźnie zespolonej.

5.1. $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,((1-3j)z + 2j) < 0\}$

5.2. $\{z \in \mathbb{C} : 2 \leqslant |z - j + 3| < 3\}$

5.3. $\left\{z \in \mathbb{C} : \left|\dfrac{z-j}{z-2+j}\right| \geqslant 1\right\}$

5.4. $\{z \in \mathbb{C} : 3|z + j| \leqslant |z^2 + 1|\}$

5.5. $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,[(1-j)z^3] = 0\}$

5.6. $\left\{z \in \mathbb{C} : \dfrac{\pi}{2} \leqslant \arg \dfrac{z+j}{z-j} < \pi\right\}$

5.7. $|z - 1| + |z + 1| = 3$

5.8. $|z - 1| + |z + 1| = 2$

5.9. $|z-1|+|z+1|=1$

5.10. $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leqslant |z-1| \leqslant 2, Re(z) \geqslant 0, Im(z) \leqslant -1\}$

6. Czy funkcja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$ jest injekcją? Czy jest 'na'? Wyznaczyć $f(\mathbb{R}_-)$ oraz $f^{-1}(\mathbb{R}_-)$.

7. Rozwiązać równania (w $\mathbb{C}$)

7.1. $z^2+z+1=0$,

7.2. $z^2-2z+2=0$,

7.3. $z^3+8=0$.

8. Znaleźć wzory przedstawiające $\cos(6\alpha)$ i $\sin(6\alpha)$ w zależności od $\cos(\alpha)$ i $\sin(\alpha)$.

9. Znaleźć postać trygonometryczną liczby $cos\alpha + 1 + jsin\alpha$ dla $\alpha \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

10. Wykazać, że dla dowolnych $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

10.1. $||z_1|-|z_2|| \leqslant |z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$

10.2. $|z_1+z_2|^2 \leqslant 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$