

Algebra i Teoria Mnogości

Zestaw zadań nr 6

1. Rozwiązać równania

1.1. $z^3 + 2z^2 + z + 2 = 0$

1.2. $\frac{3-j}{2+j} \cdot \bar{z} + 1 = |4-3j| \cdot z$

1.3. $|z|^2 + z = 7 - j$

1.4. $z^4 = \left(\frac{9+13j}{3j-1}\right)^2$

1.5. $9|z|^2 \cdot z = \bar{z}^5$

1.6. $z^3 = \frac{\sqrt{6}(8j-8)}{\sqrt{3}-3j}$

2. Zaznaczyć rozwiązania równania $z^5 = 8z^2$ na płaszczyźnie zespolonej.

Ile jest pierwiastków rzeczywistych? Ile zespolonych? Które pierwiastki spełniają warunek $\operatorname{Re} z \leq \operatorname{Im} z$?

3. Wyznaczyć sumę i iloczyn pierwiastków piątego stopnia z liczby $\frac{\operatorname{Im}(1+10j) + |1-2j|^2 - 5j}{2j-1}$.

4. Rozwiązać w \mathbb{C}

4.1. $z^6 = 64$

4.2. $z^3 = \frac{(-1+j)^{30}}{(\sqrt{3}-j)^{27}}$

5. Udowodnić, że suma wszystkich pierwiastków stopnia n z dowolnej liczby zespolonej równa jest 0.

6. Wyznaczyć pierwiastki wielomianu i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej. Określić krotności pierwiastków. Ile jest różnych pierwiastków rzeczywistych? Ile zespolonych?

6.1. $w(z) = z^{21} - z^{16} - z^{11} + z^6$

6.2. $w(z) = z^{15} + 3z^{11} + 3z^7 + z^3$

6.3. $w(z) = z^{14} + jz^2$

7. Wyznaczyć współczynniki $a, b, c \in \mathbb{C}$ wielomianu $w(z) = z^3 + az^2 + bz + c$, którego pierwiastkami są liczby $2 \cos \frac{2\pi}{7}$, $2 \cos \frac{4\pi}{7}$, $2 \cos \frac{6\pi}{7}$.

8. Rozłożyć w $\mathbb{R}[x]$ na czynniki nierozkładalne wielomiany

8.1 $x^6 + 1$,

8.2 $x^5 + 1$.