

# Algebra i Teoria Mnogości

## Zestaw zadań nr 7

1. Podać przykład wielomianu  $w(z)$  piątego stopnia, który spełnia podane warunki i ma wszystkie współczynniki rzeczywiste lub uzasadnić, że taki wielomian nie istnieje.

1.1.  $w(z)$  ma dokładnie dwa różne pierwiastki rzeczywiste i dokładnie trzy różne nierzeczywiste.

1.2.  $w(z)$  ma dokładnie dwa różne pierwiastki rzeczywiste i dokładnie dwa różne nierzeczywiste.

1.3.  $w(z)$  ma mniej niż trzy różne pierwiastki zespolone, z czego co najmniej jeden nierzeczywisty.

2. Podać ogólną postać rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste nad  $\mathbb{R}$

(bez wyznaczania wartości współczynników).

2.1. 
$$\frac{x^2 - 3x}{(x + 1)^3(x^2 + 1)^2}$$

2.2. 
$$\frac{x - 3}{x^4 + 2x^3 - 2x - 1}$$

2.3. 
$$\frac{x^3}{(x^4 + 16)^2}$$

3. Wyznaczyć rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste nad  $\mathbb{R}$ .

3.1. 
$$\frac{x + 5}{(x + 3)(x - 9)}$$

3.2. 
$$\frac{2x^2 - 3x + 8}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}$$

3.3. 
$$\frac{1}{x^2 - 2x - 1}$$

3.4. 
$$\frac{x^3 - x^2 + 2x + 3}{x^4 - 5x^2 + 4}$$

3.5. 
$$\frac{2x^3 + 5x^2 + 3x + 1}{x^2(x^2 + 1)^2}$$

3.6. 
$$\frac{5x^3 - 11x^2 + 5x + 4}{(x - 1)^4}$$

4. Podać ogólną postać rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste nad  $\mathbb{C}$

(bez wyznaczania wartości współczynników).

4.1. 
$$\frac{z}{z^2 + 2jz - 4}$$

4.2. 
$$\frac{z^2 - 1}{z^3(z^2 + 4)(z - 2j)}$$

4.3. 
$$\frac{z + 1}{(z^4 + 16)^2}$$

Jeżeli  $g(z) = (z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$ , gdzie  $n \in \mathbb{N}_+$  oraz  $z_1, \dots, z_n$  są różnymi liczbami zespolonymi to współczynniki rozkładu  $\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_1}{z - z_1} + \dots +$

$\frac{a_n}{z - z_n}$  wyrażają się wzorami  $a_i = \frac{f(z_i)}{g'(z_i)}$  dla  $i = 1, \dots, n$ .

5. Wyznaczyć rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste nad  $\mathbb{C}$ .

5.1. 
$$\frac{4z}{z^4 - 1}$$

5.2. 
$$\frac{z^{2011}}{z^{2012} + 1}$$

6. Sprawdzić, czy następujące funkcje są uławkami prostymi:

6.1.  $\frac{x+1}{(x^2+1)^9}$  nad  $\mathbb{R}$ ,

6.2.  $\frac{x^2+1}{(x^4+1)^3}$  nad  $\mathbb{R}$ ,

6.3.  $\frac{1}{(x^2+1)}$  nad  $\mathbb{C}$ ,

6.4.  $\frac{x+1}{(x^3-2)}$  nad  $\mathbb{Q}$ .

7. Rozłożyć na ułamki proste nad  $\mathbb{R}$  funkcję wymierną  $\frac{x+2}{(x^2-1)^2}$ .

8. Rozłożyć na ułamki proste nad  $\mathbb{R}$  funkcję wymierną  $\frac{x^2+1}{(x^3+1)(x-1)}$ .