Algebra i Teoria Mnogości
Zestaw zadań nr 9

1. Czy W jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej V nad $\mathbb{R}$?

Jeśli tak, to wyznaczyć jej bazę i wymiar.

1.1. $V = \mathbb{R}^2 \quad W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3y\}$

1.2. $V = \mathbb{R}^3 \quad W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \vee y = 0\}$

1.3. $V = \mathbb{R}^2 \quad W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$

1.4. $V = \mathbb{R}^3 \quad W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + z = 0\}$

1.5. $V = \mathbb{C} \quad W = \{z \in \mathbb{C} : z = -j \cdot \overline{z}\}$

1.6. $V = \mathbb{R}^3 \quad W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2 = 0\}$

1.7. $V = \mathbb{R}_2[x] \quad W = \{w \in \mathbb{R}_2[x] : w(\pi) = 0\}$

1.8. $V = \mathbb{R}_2[x] \quad W = \{w \in \mathbb{R}_2[x] : w(-2) \neq w(1)\}$

1.9. $V = \mathbb{R}_2[x] \quad W = \{w \in \mathbb{R}_2[x] : w(0) = \pi\}$

1.10. $V = \mathbb{R}_2[x] \quad W = \{w \in \mathbb{R}_2[x] : w(-2) = w(1)\}$

1.11. $V = \mathbb{R}_3[x] \quad W = \{w \in \mathbb{R}_3[x] : w''(2) = 0\}$

1.12. $V = \mathbb{C} \quad W = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z \cdot (2 + j)) = 0\}$

2. Dla jakich wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$

2.1. wektor $(1, 2, a)$ jest kombinacją liniową wektorów $(3, 2, 1)$ i $(1, 1, 3)$?

2.2. wektor $3x^3 + 2x^2 + 4$ jest kombinacją liniową wektorów $x^3 + ax$ i $-x^2 + bx + a$?

3. Czy układ $\mathcal{A}$ jest liniowo niezależny? Czy jest bazą przestrzeni V nad $\mathbb{K}$?

3.1. $V = \mathbb{R}^3 \qquad \mathbb{K} = \mathbb{R} \qquad \mathcal{A} = ((1, 1, 1), (1, 2, 0), (0, -1, 1))$

3.2. $V = \mathbb{C} \qquad \mathbb{K} = \mathbb{R} \qquad \mathcal{A} = (2 + j, 4 - j)$

3.3. $V = \mathbb{C} \qquad \mathbb{K} = \mathbb{C} \qquad \mathcal{A} = (2 + j, 4 - j)$

3.4. $V = \mathbb{R}_3[x] \qquad \mathbb{K} = \mathbb{R} \qquad \mathcal{A} = (x - 1, (x - 1)^2,\ (x - 1)^3)$

3.5. $V = \mathbb{R}_3[x] \qquad \mathbb{K} = \mathbb{R} \qquad \mathcal{A} = (x^3 + 2x, 2x^3 - x^2 + 1, x^2 + 2x - 5)$

3.6. $V = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} : a, b, c \in \mathbb{Q}\} \quad \mathbb{K} = \mathbb{Q}$

$\mathcal{A} = (1 + \sqrt{2}, 1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$

4. Czy układ $\mathcal{B} = (x^2+3, x+3, x^2+3x)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$ nad $\mathbb{R}$?
Jeśli tak, to wyznaczyć współrzędne wektora x^2+2x+9 w bazie $\mathcal{B}$.

5. Wyznaczyć maksymalny liniowo niezależny podukład układu

$$((1,-1,0),(1,0,-1),(0,1,-1))$$

i rozszerzyć go do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

6*. Układ (u,v,w) jest bazą przestrzeni V nad $\mathbb{R}$.
Czy układ $(u-3v+4w, 2w-u, 2w-v)$ jest bazą przestrzeni V?
Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni $W = Lin\{u-3v+4w, 2w-u, 2w-v\}$.
Czy $U = \{\alpha u + \beta v + \gamma w : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \wedge \alpha - \beta + 3\gamma = 0\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni V?

7*. Wykazać, że jeśli U i W są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V
to $U+W = \{u+w : u \in U \wedge w \in W\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni V.