Algebra Liniowa z Geometrią 1
Matematyka, I semestr, I rok
Wydział Matematyki i Nauk informacyjnych
Politechnika Warszawska

Przykładowe zadania egzaminacyjne. Proszę także powtórzyć zadania z zestawów ćwiczeniowych.

(1) Znaleźć wzory przetawiające $\cos(6\alpha)$ i $\sin(6\alpha)$ w zależności od $\cos(\alpha)$ i $\sin(\alpha)$.

(2) Obliczyć
   (a) $(1+j)^6(1-\sqrt{3}j)^{35}$
   (b) $\left(\frac{\sqrt{3}+j}{1-j}\right)^{100}$

(3) 0bliczyć
   (a) $\sqrt[6]{64}$
   (b) $\sqrt[3]{\frac{(-1+j)^{30}}{(\sqrt{3}-j)^{27}}}$

(4) Udowodnić, że suma wszystkich pierwiastków stopnia n z dowolnej liczby zespolonej równa jest 0.

(5) Znaleźć wszystkie liczby zespolone sprzężone ze swoją piątą potęgą.

(6) Gdzie leżą na płaszczyźnie zespolonej te liczby z, które spełniają warunek:
   (a) $|z-1|+|z+1|=3$
   (b) $|z-1|+|z+1|=2$
   (c) $|z-1|+|z+1|=1$

(7) Współrzędne wektora v w bazie (u_1, u_2, u_3) wynoszą $[2,1,3]$. Znaleźć współrzędne tego wektora w bazie $(u_1-u_2, 2u_1+u_2+u_3, u_1-u_2+u_3)$.

(8) Znaleźć bazę jądra i bazę obrazu przekształcenia liniowego $\phi(x) = Ax$, gdzie A jest macierzą $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

(9) Czy istnieje przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, takie, że $\phi([2,1,1]) = [2,1,2]$, $\phi([2,1,2]) = [2,1,1]$, $\phi([2,1,3]) = [2,1,0]$, $\phi([2,1,0]) = [2,1,3]$? Jeśli istnieje to czy jest ono wyznaczone jednoznacznie?

(10) Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x + 2y - z + u - v = 5 \\ 2x + y - 3z + u + 3v = 4 \\ 3x - 5z + u + v = 6 \end{cases}$$

(11) Rozwiązać układ jednorodny:

$$\begin{cases} x & +y & -z & +u & = & 0 \\ x & -2y & +z & +4u & = & 0 \\ x & +4y & -3z & -2u & = & 0 \end{cases}$$

(12) Rozwiązać układ równań :

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & +u & = & 3 \\ x & -2y & +z & -u & = & 1 \\ 4x & -2y & & +u & = & 0 \end{cases}$$

(13) Rozwiązać układ równań :

$$\begin{cases} 4x & +y & +3z & -u & = & 7 \\ 2x & -y & +3z & +2u & = & 7 \\ 3x & +y & +2z & -u & = & 5 \\ 5x & +y & +4z & +2u & = & 15 \end{cases}$$

(14) Rozwiązać układ równań :

$$\begin{cases} (a+2)x & +3y & +6z & +3u & = & 0 \\ 2x & +(a+1)y & +4z & +2u & = & 0 \\ x & +y & +(a+1)z & +u & = & 0 \end{cases}$$

(15) Przedyskutować rozwiązalność układu równań w zależności od parametru a:

$$\begin{cases} ax & +y & -z & +u & +2v & = & 3 \\ 2x & -y & +az & -u & +2v & = & 1 \\ 3x & +ay & -z & +u & +az & = & 2 \end{cases}$$

(16) Znaleźć macierz A^{-1}, jeśli istnieje, gdzie

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 8 \\ -10 & 4 & 7 \\ -12 & 2 & 11 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -3 & 7 \\ -5 & 2 & -2 & 6 \\ -7 & 1 & -2 & 9 \\ -6 & 1 & -3 & 9 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -13 & -2 & 17 \\ -4 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

(17) Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $(1, 1, 1)$, $(1, 3, 3)$, $C(3, 0, 1)$.

(18) Obliczyć objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $[1, 2, 4]$, $[2, 2, 2]$, $[3, 1, 2]$.

(19) Sprawdzić, czy zbiór $V_1 \subset \mathbb{R}^n$

(a) $V_1 = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + ... + x_n = 0\}$,

(b) $V_1 = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_2 = x_3\}$ $(n > 2)$

jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$? Jeśli tak, to podać jej bazę i wymiar.

(20) Znaleźć jądro i obraz przekształcenia liniowego $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ danego wzorem $\phi((x, y, z)) = (2x + y - z, -4x - 2y + 2z)$.

(21) Znaleźć wzór przekształcenia liniowego $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ postaci:

$$\phi((x, y, z)) = (a_1x + b_1y + c_1z, a_2x + b_2y + c_2z, a_3x + b_3y + c_3z),$$

jeśli $\phi((1, 1, 1)) = (2, 1, 3)$, $\phi((1, 1, 0)) = (1, 1, 2)$, $\phi((1, 0, 0)) = (3, 2, 1)$.

(22) Wykazać, że jeżeli $\phi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym i $ker\phi = \{0\}$ oraz wektory $v_1, ..., v_k$ są liniowo niezależne, to wektory $\phi(v_1), ..., \phi(v_k)$ też są liniowo niezależne.

(23) Niech $\mathbb{C}[x]$ będzie przestrzenią liniową wielomianów zespolonych jednej zmiennej x. Sprawdzić, czy przekształcenia $\phi_1 : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$ dane wzorem $\phi_1(f) = jf(j)$ oraz $\phi_2 : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$ dane wzorem $\phi_2(f) = f(j) - j$ są przekształceniami liniowym. Znaleźć jądro i obraz.