Wykład z Algebra liniowa z geometrią 1

Traspozycja macierzy i gwiazdkowy prezent – przestrzenie i przekształcenia dualne (czyli „z gwiazdką" V^*, φ^*)

$A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ $\quad A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ $\quad A^T\in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ $\quad (A^T)_{ij}=a_{ji}$

$(A^T)^{(j)}=A_{(j)}$ $\quad (A^T)_{(i)}=A^{(i)}$ $\quad A^T$ – macierz transponowana $\quad (AB)^T=B^T\cdot A^T$ $\quad (A^T)^T=A$

$V^*=L(V,\mathbb{K})$ $\quad f\in V^*$ jeśli $f:V\to\mathbb{K}$ liniowe $\quad V^*$ – przestrzeń dualna (sprzężona) do V

$V=\mathbb{K}^n$ $\quad f\in(\mathbb{K}^n)^*$ $\quad f:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}\Rightarrow f=\varphi_A$ $\quad A\in M_{1\times n}(\mathbb{K})$ $\quad A=[a_1,\dots,a_n]$

$a=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\in\mathbb{K}^n$ $\quad f(v)=\varphi_A\left(\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}\right)=\sum_{i=1}^{n}a_iv_i$ $\quad f(v)=a^T\cdot v=[a_1,\dots,a_n]\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot v_i$ $\quad (\mathbb{K}^n)^*\simeq\mathbb{K}^n$

$f\longmapsto a$

$\psi: V\to W$ $\quad f\in W^*$ $\quad V\xrightarrow{\psi}W\xrightarrow{f}\mathbb{K}$ $\quad \psi^*(f)=f\circ\psi\in V^*$ $\quad \psi^*: W^*\to V^*$

$f\longmapsto\psi^*(f)$ ($f\in W^*$, $\psi^*(f)\in V^*$)

$\psi^*(f)=f\circ\psi$ $\quad \psi^*$ – przekształcenie dualne (cofnięcie)

$V\xrightarrow{\psi}W$

$V^*\xleftarrow{\psi^*}W^*$

$V=\mathbb{K}^n$ $\quad W=\mathbb{K}^m$

$\psi\in L(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m)$ $\quad \psi=\varphi_B$ $\quad B\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ $\quad \psi(v)=B\cdot v$

$f\in(\mathbb{K}^m)^*$ $\quad f(w)=a^Tw$ $\quad a\in\mathbb{K}^m$

$\varphi_B^*(f)=f\circ\varphi_B$ $\quad (\varphi_B^*(f))(v)=(f\circ\varphi_B)(v)=f(\varphi_B(v))=f(B\cdot v)=a^T\cdot B\cdot v=(B^T\cdot a)^Tv$

$(B^T\cdot a)^T=a^T(B^T)^T=a^TB$

$\varphi_B^*(f)=\varphi_B^*(a)=B^T\cdot a$ $\quad \varphi_B^*=\varphi_{B^T}$ $\quad$ Macierzą cofnięcia φ_B^* jest B^T

Przykład

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \qquad \varphi_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad \varphi_B\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v_1 + 2v_2 \\ 3v_1 - v_3 \end{bmatrix}$$

$$f \in (\mathbb{R}^2)^* \qquad f\left(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}\right) = a_1 w_1 + a_2 w_2 = [a_1, a_2]\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_B^*(f)\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = f\left(\varphi_B\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right)\right) = f\left(B \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} v_1 + 2v_2 \\ 3v_1 - v_3 \end{bmatrix}\right) = a_1 \cdot (v_1 + 2v_2) + a_2(3v_1 - v_3)$$

$$(\varphi_B^*(f))\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = (a_1 + 3a_2)v_1 + 2a_1 v_2 - a_2 v_3 \qquad f \mapsto \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \qquad \varphi^*(f) \mapsto \begin{bmatrix} a_1 + 3a_2 \\ 2a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_B^*\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 + 3a_2 \\ 2a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix} \qquad (\varphi_B)^* = \varphi_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B^T$$